円形加速器

update: 2017 June. 20, author: Sho K. NAKAMURA

[?] サイクロトロン加速器

これは荷電粒子が一様磁場中で円運動することを利用して作られた粒子加速器である。D 電極と呼ばれる電極中に、一様磁場を用意する。その 2 つ電極に交流によって電圧をかけることで、D 電極間に電位差を生じさせる。D 電極内を半周して出てきた荷電粒子をその電位差による電場でもって加速する、という仕組みである。荷電粒子の運動方程式は

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \times \frac{\mathbf{B}}{c} \implies \begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = qv_y\dfrac{B}{c} \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = -qv_x\dfrac{B}{c} \end{cases} \tag{1}$$

$Z \equiv v_x + iv_y$ と置くと、この連立微分方程式を簡単に解くことができる。

$$m\frac{dZ}{dt} = iq\frac{B}{c}Z \implies Z = Z_0 e^{iqB/(mc)t} \tag{2}$$

ここで $\omega_{\mathrm{ce}} \equiv qB/mc$ はサイクロトロン振動数である。振動周期 T は

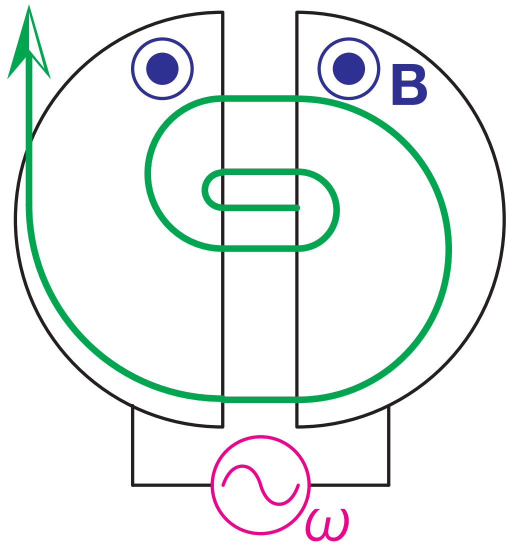

fig 1: サイクロトロン加速器の概要。

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{\mathrm{ce}}} = \frac{2\pi mc}{qB} \tag{3}$$

$B = \mathrm{const}$ ならば、$T = \mathrm{const}$ であることがわかる (等時性)。交流 $V(t) = V_0 \cos\omega t$ で加速することで、半周期 $T/2$ ごとに電場 V_0/d により加速することができる。この装置によって荷電粒子は、一回の加速で qV_0 のエネルギーを受け取ることができる。n 周期後には $2nqV_0$ のエネルギー上昇が見込める。
しかし、問題はそう簡単ではない。速度が光速度 c に近づくと相対論的効果により、質量が $m\gamma$ となる。このため、周期 T の等時性が破れる。これにより、加速効率が悪くなり、最終的には加速されない 0 点にバンチングされてしまう。これがこの加速器の限界である。

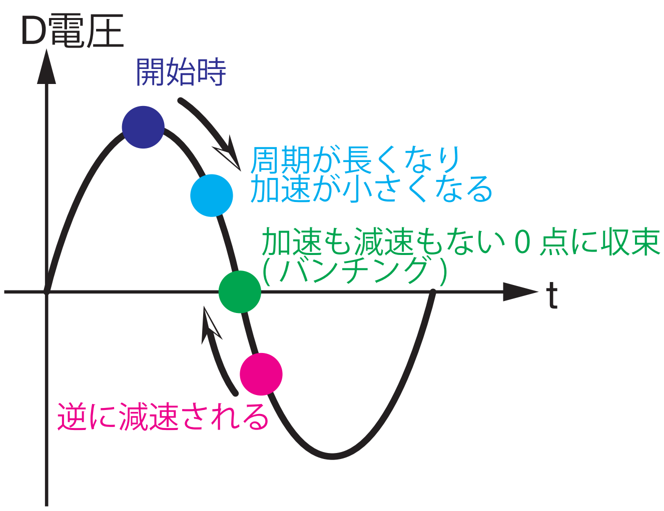

fig 2: サイクロトロン加速器で荷電粒子を加速しているときに、粒子の加速効率が悪くなっていく様子。

[?] マイクロトロン加速器

サイクロトロン運動を利用したもう一つの加速器を紹介する。一様磁場中を円運動する荷電粒子が、ある領域を通過するごとに電場で加速するといういたってシンプルな構造の加速器である。$\omega_{\mathrm{ce}} = qB/mc$、周期 $T = 2\pi mc/qB$ は D 電極を用いたサイクロトロン加速器と同じである。1 ターン (1 回の加速) で得るエネルギーを $\Delta E = \Delta mc^2$ とすると、周期は

$$\Delta T = \frac{2\pi \Delta m}{qB} \tag{4}$$

この ΔT が加速領域の加速周期 T_{rf} の整数倍であれば、荷電粒子を順調に加速させることができる。

$$\therefore \frac{2\pi \Delta mc}{qB} = nT_{\mathrm{rf}} \tag{5}$$

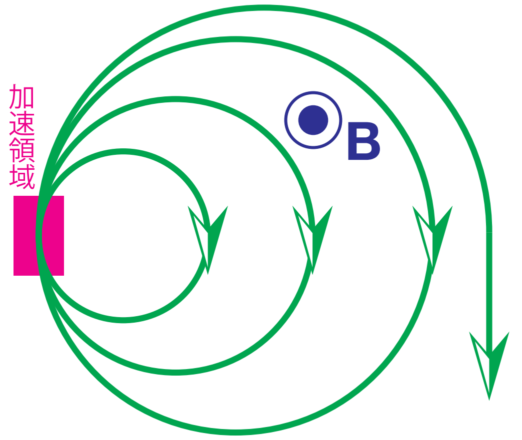

fig 3: マイクロトロン加速器の概要。

1 回目の加速までに加速領域の交流電場周期が ℓ 回振動していたとすると

$$\frac{2\pi(m + \Delta m)c}{qB} = \ell T_{\mathrm{rf}} \tag{6}$$

$$(6) - (5) \implies \frac{2\pi mc}{qB} = (\ell - n)T_{\mathrm{rf}} \tag{7}$$

$\ell - n$ が最小の時、すなわち $\ell - n = 1$ の時、B の値は最大となるため、軌道半径を最小にすることができる。よって $\ell - n = 1$ で考えると

$$(6)/(5) = \frac{m + \Delta m}{\Delta m} = \frac{\ell}{n} \implies m = \left(\frac{\ell}{n} - 1\right)\Delta m = \frac{\Delta m}{n} \tag{8}$$

$n = 1$ のときが、加速周期が一番少なくてコストが少なくて済むうえに、一度で $\Delta m = m$ だけエネルギーを与えることができる。こちらは加速するごとに加速効率が悪くなるうえに、荷電粒子の軌道が大きくなるため、莫大なエネルギーを与えるとまではいかない。せいぜい 10 30 ターンくらいの加速とされている。また装置全体を小さくするためには、加速領域も小さくしなければならないため、電子・陽電子などの加速に特化したものとなっている。

[?] ベータトロン加速器

マクスウェル方程式の一つである、ファラデーの法則を用いて粒子を加速する装置をベータトロンと呼ぶ。r 方向の運動方程式は Lorentz 力=遠心力で半径 r_0 で一定の円周上を円運動しているものとする。ここで加速する荷電粒子は電子に限るものとする。

$$-e\left(\mathbf{v} \times \frac{\mathbf{B}}{c}\right)_r = -\frac{e}{c}v_\theta B = m\frac{v_\theta^2}{r_0} \implies v_\theta = -\frac{er_0}{mc}B \tag{9}$$

ファラデーの法則を半径 r_0 の円盤で面積分する。

$$\iint_{\pi r_0^2} \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \underbrace{=}_{\text{ストークスの定理}} \oint_{r=r_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r_0 E_\theta = -\iint_{\pi r_0^2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} \implies E_\theta = -\frac{\partial \Phi/\partial t}{2c\pi r_0} \tag{10}$$

ここで Φ は磁束である。θ 方向の運動方程式より

$$m\frac{dv_\theta}{dt} = qE_\theta \implies \frac{dB}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \Phi/\partial t}{\pi r_0^2} \implies \therefore B = \frac{1}{2}\frac{\Phi}{\pi r_0^2} \tag{11}$$

最後の式の左辺にある $\Phi/\pi r_0^2$ は、半径 r_0 の円盤内での平均磁束を意味している。平均磁束の半分の磁場を r_0 の円周上に設置しておけば、円運動をしながら E_θ で電子を加速することが可能となる。

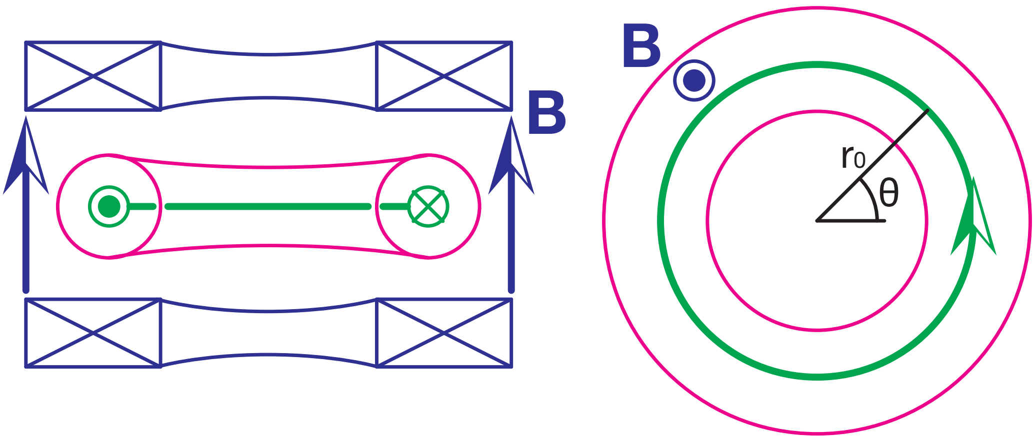

fig 4: ベータトロン加速器の概要と座標設定。左図: 縦の断面図, 右図: 上から電子の通るドーナツを見た様子。

[?] シンクロトロン加速器

質量 m, 電荷 q の荷電粒子を fig5 で表されているような円形加速器で加速することを考える。荷電粒子の軌道を円形に保つために、この紙面に垂直な磁場 $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ を加える。荷電粒子の運動はこの紙面内に限られていると仮定し $\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta$ とする。また荷電粒子はすでに相対論的速度に達しているものとする。相対論的運動方程式より

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\mathbf{v}) = q\mathbf{v} \times \frac{\mathbf{B}}{c} \implies \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(mc\gamma\beta_r) = q\beta_\theta B \\ \dfrac{d}{dt}(mc\gamma\beta_\theta) = -q\beta_r B \end{cases} \tag{12}$$

サイクロトロン加速器のときと同様に、$Z \equiv \beta_r + i\beta_\theta$ と置くと

$$\frac{d}{dt}(m\gamma c Z) = iqBZ \tag{13}$$

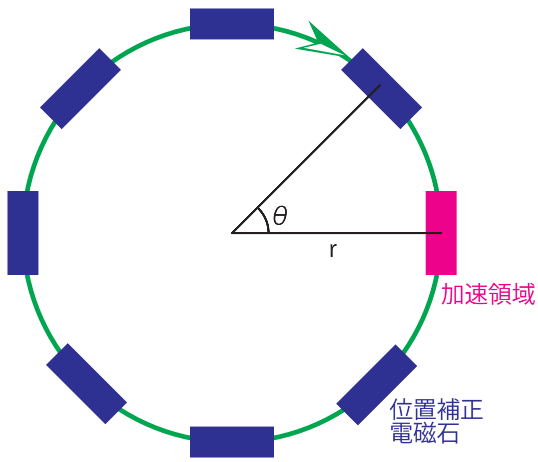

fig 5: シンクロトロン加速器の概要と座標設定。

ここで、粒子の速度はすでに超相対論的なものに達し、ほぼ定常状態に落ち着いているとする。すなわち $m\gamma \sim \mathrm{const}$ と仮定すると

$$\frac{dZ}{dt} = i\frac{qB}{m\gamma c}Z \implies Z = Z_0 e^{iqB/(mc\gamma)t} = Z_0 e^{i\omega_{\mathrm{se}}t} \tag{14}$$

ここで $\omega_{\rm se} \equiv qB/mc\gamma$ はシンクロトロン振動数である。軌道半径 R は

$$R = \frac{v_\theta}{\omega_{\rm se}} = \frac{mc^2\gamma\beta_\theta}{qB} \implies qB = \frac{mc^2\gamma\beta_\theta}{R} \tag{15}$$

$$\therefore mc\gamma\dot{\beta}_r = q\frac{mc^2\gamma\dot{\beta}_\theta}{R} \implies \dot{\beta}_r = \frac{c^2\beta_\theta^2}{R} \tag{16}$$

点電荷が放出する輻射場のエネルギーを表した式、Lienard の公式より

$$P = \frac{2q^2}{3c^3}\{\gamma^6(\dot{v}^2 - |\dot{v}\times\boldsymbol{\beta}|^2)\} = \frac{2q^2}{3c^3}\{\gamma^6\dot{v}^2(1-\boldsymbol{\beta}^2)\} = \frac{2q^2}{3c^3}\gamma^4\frac{c^4\beta_\theta^4}{R^2} = \frac{2q^2}{3}\frac{\beta_\theta^4\gamma^4}{R^2} \propto E^4/R^2 \tag{17}$$

途中、磁場による軌道補正はでは常に $\mathbf{v} \perp \dot{\mathbf{v}}$ の性質を用いた。このことから、軌道半径 R が大きいほど輻射によるエネルギー損失は小さくなることがわかる。2012 年にヒッグス粒子を発見した CERN の円形加速器 LHC は周長 27km である。これは大体、日本の山手線の周長 34.5km より一回り小さいくらいのものと考えれば、その大きさが想像できるだろう。

参考文献

[1] 東北大学理学部物理学科 電気力学 (2008 年度開講, 担当教官: 中村哲) 授業ノート

[2] 東北大学理学部宇宙地球物理学科 天体物理学 II (2008 年度開講, 担当教官: 服部誠) 授業テキスト

[3] 東北大学理学部物理学科 素粒子物理学基礎 (2010 年度開講, 担当教官: 白井淳平) 授業スライド