Synchrotron self-absorption

update:5/Nov/2011, presented by Sho Nakamura

Einstein 係数と関係式

証明は省略。自発的放射 (spontaneous emission) による準位 $2 \to 1$ の遷移確率を A_{21}、吸収 (absorption) による準位 $1 \to 2$ の遷移確率を表す係数を B_{12}、外部から来た光子の誘発による放射 (stimulated emission) による準位 $2 \to 1$ の遷移確率を表す係数を B_{21} と書くと、Einstein の関係式は

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21} \tag{1}$$

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21} \tag{2}$$

である。g_1, g_2 はそれぞれの準位における統計的重率 (縮退度) である。

Synchrotron self-absorption

Synchrotron self-absorption とは文字通り、Synchrotron 放射を出すガス自身が Synchrotron 放射の光子を吸収することにより Synchrotron 放射のスペクトルが変形する現象である。以下ではその吸収係数およびそのガスの Source function を求める。ここで電子の放射・吸収は等方的であり、磁場の方向もランダムとして電子の分布も等方的であるとする。
準位 1, 2 にいる電子数をそれぞれ n_1, n_2 とすると吸収係数 α_ν は

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= (\text{準位 1 にいる電子 } h\nu \text{の光子を吸収して準位 2 に遷移する分}) \\ &\qquad\qquad - (\text{準位 2 にいる電子が } h\nu \text{の光子に誘導されて準位 1 に遷移する分}) \\ &= \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12}\phi(\nu) - \frac{h\nu}{4\pi} n_2 B_{21}\phi(\nu) = \frac{h\nu}{4\pi}\left\{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}\right\}\phi(\nu) \end{aligned} \tag{3}$$

と書けるのであった。ここで $\phi(\nu)$ は line profile function である。
今、電子は Synchrotron 放射を出すような自由電子の集まりを考えているので、原子に束縛されているときに決まったエネルギー順位があるわけではない。よって吸収係数は

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \sum_{E_1} \sum_{E_2} \left\{n(E_1) B_{12} - n(E_2) B_{21}\right\} \phi_{21}(\nu) \tag{4}$$

ように書くほうが正しいだろう。ただし、$h\nu$ の光子を考えているため

$$E_1 = E_2 - h\nu \tag{5}$$

という条件がつく。Synchrotron 放射を「磁場の周りを運動する、エネルギー E_2 を持つ電子の自発的放射によるもの」と考えると

$$P_e(\nu, E_2) = h\nu \sum_{E_1} A_{21}\phi_{21}(\nu) \underbrace{=}_{(2)} h\nu \frac{2h\nu^3}{c^2} \sum_{E_1} B_{21}\phi_{21}(\nu) \tag{6}$$

自由電子なので、統計的重率は 2 つのエネルギー準位で等しいと考えてよい ($g_1 = g_2$)。これより

$$
(4) \text{ 式第 1 項} = \frac{h\nu}{4\pi}\sum_{E_1}\sum_{E_2} n(E_1)B_{12}\phi_{21}(\nu) \underbrace{=}_{(1),(5)} \frac{h\nu}{4\pi}\sum_{E_2} n(E_2-h\nu)\sum_{E_1} B_{21}\phi_{21}(\nu) \underbrace{=}_{(6)} \frac{c^2}{8\pi h\nu^3}\sum_{E_2} n(E_2-h\nu)P_e(\nu,E_2) \quad (7)
$$

$$
(4) \text{ 式第 2 項} = -\frac{h\nu}{4\pi}\sum_{E_1}\sum_{E_2} n(E_2)B_{21}\phi_{21}(\nu) \underbrace{=}_{(6)} -\frac{c^2}{8\pi h\nu^3}\sum_{E_2} n(E_2)P_e(\nu,E_2) \quad (8)
$$

$$
\therefore\ \alpha_\nu = \frac{c^2}{8\pi h\nu^3}\sum_{E_2}\{n(E_2-h\nu)-n(E_2)\}\,P_e(\nu,E_2) \quad (9)
$$

同じエネルギー E_2 を持つ電子でも運動量の向きが違うこともある。よってこの和は運動量で行わなければならない。運動量空間での電子の分布関数を $f(\mathbf{p}_2)$ とおくと

$$
\alpha_\nu = \frac{c^2}{8\pi h\nu^3}\sum_{\mathbf{p}_2}\{f(\mathbf{p}_2^*)-f(\mathbf{p}_2)\}\,P_e(\nu,\mathbf{p}_2) \quad (10)
$$

$\mathbf{p}_2^*$ は $E_2 - h\nu$ に対応する運動量ベクトルである。Synchrotron 放射を出す電子が extreme relativistic と考えると

$$
E_2 = \sqrt{m_e^2c^4+p_2^2c^2} \simeq p_2c \implies dE_2 = cdp_2 \quad (11)
$$

電子の分布は等方的と仮定しているので

$$
f(\mathbf{p}_2)d^3\mathbf{p}_2 = f(p_2)d^3\mathbf{p}_2 = 4\pi p_2^2 f(p_2)dp_2 = n(E_2)dE_2 \implies f(p_2) = \frac{n(E_2)}{4\pi p_2^2}\frac{dE_2}{dp_2} = \frac{c^3}{4\pi}\frac{n(E_2)}{p_2^2c^2} \underbrace{=}_{(11)} \frac{c^3}{4\pi}\frac{n(E_2)}{E_2^2} \quad (12)
$$

として、運動量の和を積分になおすと

$$
\alpha_\nu = \frac{c^2}{8\pi h\nu^3}\int_0^\infty \frac{c^3}{4\pi}\left(\frac{n(E_2-h\nu)}{(E_2-h\nu)^2}-\frac{n(E_2)}{E_2^2}\right)P_e(\nu,E_2)4\pi p_2^2dp_2 \underbrace{=}_{(11)} \frac{c^2}{8\pi h\nu^3}\int_0^\infty \left(\frac{n(E_2-h\nu)}{(E_2-h\nu)^2}-\frac{n(E_2)}{E_2^2}\right)P_e(\nu,E_2)dE_2 \quad (13)
$$

$E_2 \gg h\nu$ として、被積分関数の第一項を $h\nu$ の 1 次まで Taylor 展開すると

$$
\alpha_\nu = \frac{c^2}{8\pi h\nu^3}\int_0^\infty \left\{\frac{n(E_2)}{E_2^2}+(-h\nu)\frac{d}{dE_2}\left(\frac{n(E_2)}{E_2^2}\right)-\frac{n(E_2)}{E_2^2}\right\}P_e(\nu,E_2)dE_2 = -\frac{c^2}{8\pi\nu^2}\int_0^\infty \frac{d}{dE_2}\left(\frac{n(E_2)}{E_2^2}\right)P_e(\nu,E_2)dE_2 \quad (14)
$$

電子のエネルギー分布として

$$
n(E_2)dE_2 = N_0E_2^{-p}dE_2 \quad (15)
$$

のようなベキ乗分布を仮定すると

$$
\frac{d}{dE_2}\left(\frac{n(E_2)}{E_2^2}\right) = \frac{d}{dE_2}(N_0E_2^{-(p+2)}) = -(p+2)N_0E_2^{-(p+2)}E_2^{-1} = -(p+2)\frac{n(E_2)}{E_2} \quad (16)
$$

$$\therefore\ \alpha_\nu = \frac{c^2}{8\pi\nu^2}(p+2)\int_0^\infty \frac{n(E_2)}{E_2}P_e(\nu, E_2)dE_2 \tag{17}$$

ここで、1 個の電子からの Synchrotron 放射のスペクトル式は

$$P_e(\nu)d\nu = P_e(\omega)d\omega = 2\pi P_e(\omega)d\nu \implies P_e(\nu) = \frac{\sqrt{3}e^3B}{m_ec^2}F(\chi_0) \qquad \left(\chi_0 \equiv \frac{2m_ec\omega}{3eB}\gamma^{-2} = \frac{4\pi m_ec\nu}{3eB}\gamma^{-2}\right) \tag{18}$$

であった (TA, report11 参照)。また

$$\begin{aligned} E_2 &= \sqrt{m_e^2c^4+p_2^2c^2} = \sqrt{m_e^2c^4+(m_e\gamma v_2)^2c^2} = \sqrt{m_e^2c^4+m_e^2\gamma^2\beta^2c^4} = m_ec^2\sqrt{1+\gamma^2\beta^2} = m_ec^2\sqrt{1+\frac{\beta^2}{1-\beta^2}} \\ &= m_ec^2\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} = m_e\gamma c^2 \implies dE_2 = m_ec^2d\gamma \end{aligned} \tag{19}$$

より

$$\alpha_\nu = \frac{c^2}{8\pi\nu^2}(p+2)\int_0^\infty N_0(m_ec^2\gamma)^{-(p+1)}\frac{\sqrt{3}e^3B}{m_ec^2}F(\chi_0)m_ec^2d\gamma = \frac{\sqrt{3}N_0c^2e^3B(p+2)}{8\pi\nu^2(m_ec^2)^{p+1}}\int_0^\infty \gamma^{-(p+1)}F(\chi_0)d\gamma \tag{20}$$

χ_0 の定義より

$$\gamma = \left(\frac{4\pi m_ec\nu}{3eB}\right)^{1/2}\chi_0^{-1/2} \implies d\gamma = -\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi m_ec\nu}{3eB}\right)^{1/2}\chi_0^{-3/2}d\chi_0 \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= \frac{\sqrt{3}N_0c^2e^3B(p+2)}{8\pi\nu^2(m_ec^2)^{p+1}}\left(\frac{4\pi m_ec\nu}{3eB}\right)^{-\frac{p+1}{2}}\left(\frac{4\pi m_ec\nu}{3eB}\right)^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\right)\int_\infty^0 \chi_0^{\frac{p+1}{2}}F(\chi_0)\chi_0^{-3/2}d\chi_0 \\ &= \frac{\sqrt{3}N_0c^2e^3B(p+2)}{16\pi\nu^2(m_ec^2)^{p+1}}\left(\frac{4\pi m_ec\nu}{3eB}\right)^{-p/2}\underbrace{\int_0^\infty \chi_0^{\frac{p}{2}-1}F(\chi_0)d\chi_0}_{\text{公式}} \\ &= \frac{\sqrt{3}N_0c^2e^3B(p+2)}{16\pi\nu^2(m_ec^2)^{p+1}}\left(\frac{4\pi m_ec\nu}{3eB}\right)^{-p/2}\frac{2^{\frac{p}{2}-1+1}}{\frac{p}{2}-1+2}\Gamma\left(\frac{\frac{p}{2}-1}{2}+\frac{7}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\frac{p}{2}-1}{2}+\frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}N_0c^2e^3B(p+2)}{16\pi\nu^2(m_ec^2)^{p+1}}\left(\frac{4\pi m_ec\nu}{3eB}\right)^{-p/2}\frac{2^{\frac{p}{2}+1}}{p+2}\Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}N_0c^2e^3B}{8\pi\nu^2(m_ec^2)^{p+1}}\left(\frac{3eB}{4\pi m_ec\nu}\right)^{p/2}2^{p/2}\Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}N_0c^2e^3B}{8\pi\nu^2(m_ec^2)^{p+1}}\left(\frac{3eB}{2\pi m_ec\nu}\right)^{p/2}\Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}N_0e^3}{8\pi m_e}\left(\frac{3e}{2\pi m_e^3c^5}\right)^{p/2}B^{\frac{p}{2}+1}\nu^{-\frac{p+4}{2}}\Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right) \end{aligned} \tag{22}$$

よって、ベキ乗分布のときの Synchrotron 放射スペクトル

$$P_{\rm tot} = \frac{\sqrt{3}e^3BN_0\gamma_0^{p-1}}{8\pi^2m_ec^2(p+1)}\left(\frac{m_ec\omega}{3eB}\right)^{-\frac{p-1}{2}}\Gamma\left(\frac{p}{4}+\frac{19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{p}{4}-\frac{1}{12}\right) \tag{23}$$

と合わせて、source function は

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} = \frac{P_{\rm tot}}{4\pi\alpha_\nu} \propto \frac{\nu^{-\frac{p-1}{2}} B^{\frac{p+1}{2}}}{B^{\frac{p}{2}+1}\nu^{-\frac{p+4}{2}}} \propto B^{-\frac{1}{2}}\nu^{\frac{5}{2}} \tag{24}$$

となり、Synchrotron 放射を出している領域が optically thick の場合には、スペクトルが $\nu^{\frac{5}{2}}$ に比例する形になる。

Bibliography

[1] Rybicki, G, B., Lightman, A, P. *Radiative Processes in Astrophysics*

[2] Longair, M, S. *High Energy Astrophysics*