10 Report ?

update: 2017 Dec. 04, author: Sho K. NAKAMURA

[?] 余興、放射による反作用

電子がなんらかの束縛を受けて周期的な運動をしているとし、

$$\mathbf{v}(t_1) = \mathbf{v}(t_2) = \mathbf{0} \tag{1}$$

であるとする。また電子の速度は非相対論的とする。電子は加速度運動をして放射を出し、エネルギーを失う。このエネルギーを失う効果を「放射による反作用」と捉え、放射がでる分だけ電子に減衰力がはたらくものと考える。すなわち減衰力を $\mathbf{f}$ とすると ($t_1 \sim t_2$ の間に減衰力 $\mathbf{f}$ のする仕事)= ($t_1 \sim t_2$ の間に Larmor の式で与えられる放射によるエネルギー損失量) と考えられる。これを式で改めて書き表すと

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \; dt = -\int_{t_1}^{t_2} P_{\text{Larmor}} \; dt = -\frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{v}^2 dt \tag{2}$$

ここで

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{v}^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = \underbrace{\left[\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right]_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} \cdot \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} dt \tag{3}$$

より

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \; dt = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} \cdot \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} dt \implies \mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \tag{4}$$

電子は周期的な運動をしているとしたので、$\mathbf{v} \propto e^{-i\omega_0 t}$ とすれば

$$\mathbf{f} = -\frac{2e^2}{3c^3} \omega_0^2 \mathbf{v} = -m_e \tau \omega_0^2 \mathbf{v} \quad \left(\tau \equiv \frac{2e^2}{3m_e c^3} \sim 10^{-23} \; (s)\right) \tag{5}$$

では本題に入ろう。

[?] 束縛された電子による電磁波の散乱

質量 m_e、電荷 $-e$ の電子が

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 \tau \dot{x} - \omega_0^2 x \tag{6}$$

にしたがって一次元運動しているとする。以下、電子の運動は非相対論的極限で $\dot{x} \ll c$ とし、また $\omega_0 \tau \ll 1$ とする。座標設定は電子の運動方向を x 軸に取る。この電子による電磁波の散乱断面積を以下の手順で求めよう。

?-1. 入射電磁波は x に垂直方向に進行し、x 方向に直線偏光した角振動数 ω の電磁波であるとする、すなわち入射電磁波の電場は

$$E(t) = E_0 \cos \omega t \tag{7}$$

で書けるとする。すると、この電磁波が入射してきた後の電子の運動方程式は

$$\ddot{x} = -\omega_0^2\tau\dot{x} - \omega_0^2 x - \frac{eE_0}{m_e}\cos\omega t \tag{8}$$

のように書ける。十分時間が経過したとき $(\omega_0^2\tau t \gg 1)$ には電子の運動は定常解に落ち着く。その定常解を求めよ。
?-2. 前問で求めた結果と Larmor の公式を用いて 2 次波の放射強度の長時間平均を求めよ。
?-3. 入射電磁波のエネルギーフラックスの長時間平均が $S = \dfrac{c}{8\pi}E_0^2$ であることを用いて、束縛された電子による電磁波の全散乱断面積を求めよ。最後の結果は Thomson 散乱の全散乱断面積を用いて式整理されている方が望ましい。
?-4. 前問の結果が $\omega \gg \omega_0$ の極限おいては Thomson 散乱の全散乱断面積に一致することを示せ、その理由を式だけでなく物理的理由 (定性的な説明) も考察せよ。
?-5. Rayleigh scattering : 小問 3 の結果式から $\omega \ll \omega_0$ の極限での形を求め、それが ω^4 に比例することを示せ。
?-6 resonance scattering : 小問 3 の結果式の $\omega \sim \omega_0$ 近傍での振る舞いを考察する。$\omega - \omega_0$ 以外の ω は ω_0 で置き換えて差し支えない。例えば

$$\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \simeq 2\omega_0(\omega - \omega_0) \tag{9}$$

のような近似を行う。結果、散乱断面積が

$$\sigma(\omega) = \frac{2\pi^2 e^2}{m_e c}\frac{\frac{\Gamma}{2\pi}}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma/2)^2} \tag{10}$$

のように書けることを示せ。ここで新たに $\Gamma \equiv \omega_0^2\tau$ とした。さらに

$$\int_0^\infty \sigma(\omega)d\omega = \frac{2\pi^2 e^2}{m_e c} \tag{11}$$

となることを示せ。

[?]

?-1. (8) 式の解を

$$(\ddot{x} + \omega_0^2\tau\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 general solution) + (\ddot{x} + \omega_0^2\tau\dot{x} + \omega_0^2 x + \frac{eE_0}{m_e}\cos\omega t = 0 special solution) \tag{12}$$

の形で求める。
(i). $\ddot{x} + \omega_0^2\tau\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ の一般解。$x = e^{\lambda t}$ の形で一般解を求める。

$$\lambda^2 + \omega_0^2\tau\lambda + \omega_0^2 = 0 \implies \lambda = \frac{-\omega_0^2\tau \pm \sqrt{(\omega_0^2\tau)^2 - 4\omega_0^2}}{2} \tag{13}$$

$$\therefore x = e^{-\frac{\omega_0^2\tau}{2}t}(C_1 e^{\frac{1}{2}\sqrt{(\omega_0^2\tau t)^2 - 4\omega_0^2 t^2}} + C_2 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{(\omega_0^2\tau t)^2 - 4\omega_0^2 t^2}}) \tag{14}$$

と求まる。C_1, C_2 は初期条件から求まる定数である。
(ii). $\ddot{x} + \omega_0^2\tau\dot{x} + \omega_0^2 x + \dfrac{eE_0}{m_e}\cos\omega t = 0$ の特解。$x = C\cos(\omega t + \phi)$ の形で求める。

$$\begin{aligned}
&-\omega^2 C\cos(\omega t + \phi) - \omega_0^2\tau\omega C\sin(\omega t + \phi) + \omega_0^2 C\cos(\omega t + \phi) = -\frac{eE_0}{m_e}\cos\omega t \\
&\implies (\omega_0^2 - \omega^2)C(\cos\omega t\cos\phi - \sin\phi\sin\omega t) - \omega_0^2\tau\omega C(\sin\omega t\cos\phi + \cos\omega t\sin\phi) = -\frac{eE_0}{m_e}\cos\omega t \\
&\implies C\{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\phi - \omega_0^2\tau\omega\sin\phi\}\cos\omega t + C\{-(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\phi - \omega_0^2\tau\omega\cos\phi\}\sin\omega t = -\frac{eE_0}{m_e}\cos\omega t
\end{aligned} \tag{15}$$

右辺と左辺を比較して、左辺 $\sin\omega t$ の項の係数より

$$(\omega^2-\omega_0^2)\sin\phi-\omega_0^2\tau\omega\cos\phi=0 \iff \tan\phi=\frac{\omega_0^2\tau\omega}{\omega^2-\omega_0^2} \tag{16}$$

右辺と左辺を比較して、左辺 $\cos\omega t$ の項の係数より

$$\begin{aligned}
&C\cos\phi\{(\omega_0^2-\omega^2)-\tau\omega_0^2\omega\tan\phi\}=-\frac{eE_0}{m_e} \implies C\cos\phi(\omega^2-\omega_0^2)(-1-\underbrace{\frac{\tau\omega_0^2\omega}{\omega^2-\omega_0^2}}_{=\tan\phi}\tan\phi)=-\frac{eE_0}{m_e}\\
&\implies -C(\omega^2-\omega_0^2)\cos\phi(1+\tan^2\phi)=-C(\omega^2-\omega_0^2)\frac{1}{\cos\phi}=-\frac{eE_0}{m_e}
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\therefore C &= \frac{eE_0}{m_e}\frac{1}{(\omega^2-\omega_0^2)}\cos\phi=\frac{eE_0}{m_e}\frac{1}{(\omega^2-\omega_0^2)}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi}}\underbrace{=}_{(16)}\frac{eE_0}{m_e}\frac{1}{(\omega^2-\omega_0^2)}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0^2\tau\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\right)^2}}\\
&= \frac{eE_0}{m_e}\frac{1}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\omega_0^2\tau\omega)^2}}
\end{aligned} \tag{18}$$

求めたい (8) 式の解は (i) と (ii) を足し合わせた物ものである。しかし、今求めるのは十分時間が経ち定常状態に落ち着いたときの解 ($\omega_0^2\tau t\gg 1$) であるから、結局は

$$x=\frac{eE_0}{m_e}\frac{1}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\Gamma^2\omega^2}}\cos(\omega t+\phi)\quad\left(\Gamma\equiv\omega_0^2\tau,\ \tan\phi=\frac{\Gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\right) \tag{19}$$

?-2.

$$\ddot{x}=-\frac{eE_0}{m_e}\frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\Gamma^2\omega^2}}\cos(\omega t+\phi) \tag{20}$$

と Larmor の公式より

$$P=\frac{2e^2}{3c^3}\frac{e^2E_0^2}{m_e^2}\frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\Gamma^2\omega^2}\cos^2(\omega t+\phi) \tag{21}$$

$\cos^2$ の長時間平均

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2(\omega t+\phi)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}(1+\cos 2(\omega t+\phi))dt=\frac{1}{2} \tag{22}$$

より

$$<P>=\frac{e^2}{3c^3}\frac{e^2E_0^2}{m_e^2}\frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\Gamma^2\omega^2} \tag{23}$$

?-3. 入射電磁波のエネルギーフラックスの長時間平均は

$$<S>=\frac{c}{8\pi}E_0^2=\mathrm{const} \tag{24}$$

より

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle =< S > \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad \Longrightarrow \quad < P >=< S > \int_{4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \sigma(\omega)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sigma(\omega) = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} = \sigma_T \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \tag{25}$$

ここで、$\sigma_T \sim 2/3\mathrm{barn}$ は Thomson 散乱断面積である。

?-4. $\omega \gg \omega_0$ のとき、(25) 式より

$$\sigma(\omega) = \sigma_T \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{\omega^2}} \simeq \sigma_T \tag{26}$$

これは入射電磁波の角振動数よりも電子の周期運動の角振動数が十分小さいため、入射電磁波とっては電子は静止しているように見える、すなわちただの自由電子による散乱のように思えるためであり、これは Thomson 散乱に一致する。

?-5. $\omega \ll \omega_0$ のとき (25) 式より

$$\sigma(\omega) = \sigma_T \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \frac{1}{\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2 + \tau \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \simeq \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \sigma_T \propto \omega^4 \tag{27}$$

これを Rayleigh 散乱断面積と呼ぶ。

?-6. $\omega \simeq \omega_0$ のとき (25) 式より

$$\begin{aligned} \sigma(\omega) &= \sigma_T \frac{\omega^4}{(\omega - \omega_0)^2 (\omega + \omega_0)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \simeq \sigma_T \frac{\omega_0^4}{4\omega_0^2 (\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2 \omega_0^2} = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{m_e^2 c^4} \frac{\omega_0^2}{4(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2} \\ &= 4\pi \frac{e^2}{m_e c} \frac{\tau \omega_0^2}{4(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2} = \frac{4\pi e^2}{m_e c} \frac{\Gamma/4}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma/2)^2} = \frac{2\pi^2 e^2}{m_e c} \frac{\Gamma/(2\pi)}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma/2)^2} \end{aligned} \tag{28}$$

となる。これを共鳴散乱断面積と呼ぶ。これは Lorentz profile と呼ばれる有名な関数の形である。これを ω で積分すると

$$\int_0^\infty \frac{\Gamma/(2\pi)}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma/2)^2} d\omega \underbrace{\simeq}_{\omega - \omega_0 = \frac{\Gamma}{2} \tan\theta} \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \frac{\frac{\Gamma}{2}}{\cos^2\theta} \frac{d\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \tag{29}$$

$$\therefore \int_0^\infty \sigma(\omega) d\omega = \frac{\pi^2 e^2}{m_e c} \tag{30}$$