

# 10 Report ?. (presented by Sho Nakamura)

update:24/Apr/2011

## [ ? ] 水素原子からの放射、Lyman- $\alpha$ 、Balmer line.

電子が、陽子との Coulomb 力と遠心力が釣り合って円運動しているとする、水素原子のモデルについて考える。

?-1. 電子の力学的エネルギーが

$$E_n = -\frac{e^2}{2a_0} \frac{1}{n^2} \quad (1)$$

と書けることを示せ。ここで

$$a_0 \equiv \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \quad (2)$$

はボーア半径である。導出には遠心力=Coulomb 力の力の釣り合いと、電子の軌道の円周の長さが電子ドブロイ波長

$$\lambda = \frac{h}{m_e v} \quad (3)$$

の整数倍であるという量子力学からの要請を用いる。

?-2. 基底状態  $n = 1$  にいる水素原子の電子が photon を 1 個吸収してイオン化するには、吸収される photon のエネルギーが何 eV 以上であればよいか。またこれを光の波長に換算し  $\text{\AA}$  単位で求めよ。

?-3. Lyman- $\alpha$ 。コレ天文で重要。電子が photon を 1 個吸収し、 $n = 1$  から  $n = 2$  のエネルギー状態に移るのに必要な photon のエネルギーを eV 単位で、またその波長を  $\text{\AA}$  に換算せよ。これを Ly- $\alpha$ (Lyman- $\alpha$ ) と呼ぶ。

?-4. Balmer line。コレも重要。先ほどと同様のことを  $n = 2$  から  $n = 3$  へ遷移する場合、そして  $n = 2$  から  $n = 4$  の場合についても計算せよ。この 2 つはそれぞれ H $\alpha$ , H $\beta$  と呼ばれる。

## [ ? ]

?-1. ここでの解答は水素原子に限らず話を進め、最後に水素の原子番号である  $Z = 1$  を代入することにしよう。

$$\text{Coulombforce} = \text{Centrifugalforce} \implies \frac{Ze^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \implies m_e v r \cdot v = Ze^2 \quad (4)$$

ドブロイ条件より

$$2\pi r = \frac{h}{m_e v} n \iff m_e v r = \hbar n \quad (5)$$

$$\therefore v = \frac{Ze^2}{\hbar n}, \quad r = \frac{\hbar^2 n^2}{m_e Ze^2} \quad (6)$$

求める全力学的エネルギーは

$$E_n = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{Ze^2}{r} = \frac{1}{2} m_e \frac{Z^2 e^4}{\hbar^2 n^2} - \frac{m_e Z^2 e^4}{\hbar^2 n^2} \stackrel{(2)}{=} -\frac{1}{2} \frac{e^2 Z^2}{a_0 n^2} \quad (7)$$

?-2. (7) 式のままでは計算しづらいので、先に  $n^{-2}$  の係数を計算しておこう。

$$\frac{1}{2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} = \frac{1}{2} m_e c^2 \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \sim \frac{0.511 \text{ MeV}}{2} \left( \frac{1}{137} \right)^2 \sim 13.6 \text{ (eV)} \quad (8)$$

これは有名な数字で、量子力学で見たことがあるだろう。

$$\therefore E_n(Z) = -13.6 \frac{Z^2}{n^2} \text{ (eV)} \quad (9)$$

ちなみにボーア半径も具体的な数値を計算してみるとよい。

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{\hbar c}{m_e c^2} \frac{\hbar c}{e^2} \sim \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{0.5 \text{ MeV}} 140 \sim 5.6 \times 10^4 \text{ (fm)} = 5.6 \times 10^{-9} \text{ (cm)} = 0.56 \text{ (\AA)} \quad (10)$$

それでは本題に入る。水素原子 ( $Z = 1$ ) において  $n = 1$  に電子がいるときに必要なイオン化エネルギーは

$$h\nu = E_\infty - E_1 = 0 - (-13.6) \text{ (eV)} = 13.6 \text{ (eV)} \quad (11)$$

また波長に換算すると

$$h \frac{c}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} \simeq \frac{2\pi \cdot 200 \times 10^6 \text{ eV} \cdot \text{fm}}{\lambda} = 13.6 \text{ (eV)} \implies \lambda \sim \frac{1200 \times 10^6}{13.6} \text{ (fm)} \sim 8.5 \times 10^{-6} \text{ (cm)} = 8.5 \times 10^2 \text{ (\AA)} \quad (12)$$

紫外線、もしくは軟 X 線と呼ばれるくらいの程度である。

?-3. また  $n = 1$  から  $n = 2$  に遷移するのに必要なエネルギーは

$$\frac{1200 \times 10^6 \text{ eV} \cdot \text{fm}}{\lambda} \sim E_2 - E_1 = 10.2 \text{ (eV)} \quad (13)$$

波長に換算すると

$$\lambda \sim 1.2 \times 10^{-5} \text{ (cm)} = 1.2 \times 10^3 \text{ (\AA)} \quad (14)$$

紫外線程度である。

?-4. 同様にサクサク計算すればよい。ここに書く計算はあまり厳密ではないので、厳密に知りたい場合は理科年表や、もしくは己で関数電卓をはじくこと。

(i). H $\alpha$ .

$$\frac{1200 \times 10^6 \text{ eV} \cdot \text{fm}}{\lambda} = E_3 - E_2 = 13.6 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) = \frac{17}{9} \sim 1.9 \text{ (eV)} \quad (15)$$

$$\Rightarrow \lambda \sim \frac{1200 \times 10^6}{\frac{17}{9}} \text{ (fm)} \sim 600 \times 10^{-7} \text{ (cm)} = 6.0 \times 10^3 \text{ (\AA)} \quad (16)$$

(ii). H $\beta$ .

$$\frac{1200 \times 10^6 \text{ eV} \cdot \text{fm}}{\lambda} = E_4 - E_2 = 13.6 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) = \frac{5.1}{2} = 2.55 \text{ (eV)} \quad (17)$$

$$\Rightarrow \lambda \sim \frac{1200 \times 10^6}{\frac{5.1}{2}} \text{ (fm)} \sim \frac{8000}{17} \times 10^{-7} \text{ (cm)} \sim 4.7 \times 10^3 \text{ (\AA)} \quad (18)$$

どちらも可視光程度である。

## [ ? ] 余興、宇宙空間に存在する Fe が放出する X 線

星の核融合によって生成された Fe が超新星爆発によって宇宙空間にばらまかれている。その Fe は X 線源であり、X 線観測によく用いられる元素である。実際、完全に電離している Fe 原子 (すなわち、Fe の原子核) が存在し、そこに電子が 1 個捕まったとする。その電子がいきなり  $n = 1$  の状態に落ちたとすると、そのときに放出される photon のエネルギーは

$$h\nu = E_\infty(Z = 26) - E_1(Z = 26) = 0 - (-13.6 \times 26^2) \sim 9 \text{ (keV)} \quad (19)$$

同様に波長に換算すると

$$\lambda \sim \frac{1200 \times 10^6}{9000} \text{ (fm)} = \frac{4}{30} \times 10^{-7} \text{ (cm)} \sim 1.3 \times 10^2 \text{ (\AA)} \quad (20)$$

よって X 線程度であることがわかる。