

# Cherenkov radiation

update: 2016 Dec. 07, presented by Sho K. NAKAMURA

## [?] チェレンコフ放射

屈折率  $n_r$  の一様媒質中を、電荷  $q$  の荷電粒子が  $z$  軸に沿って等速直線運動で通り過ぎるときに発生する電磁放射を考える。点電荷は  $z = -L/2$  から出発して  $t' = 0$  で原点を通過し、 $z = L/2$  まで運動を行うとする。軸対称性より、観測者は  $yz$  平面内にいるとし、また十分遠方にいるとすると、観測者の方向を向いた単位ベクトルは

$$\mathbf{n} = (0, \sin \theta, \cos \theta) \quad (1)$$

点電荷の位置ベクトルと速度ベクトルはそれぞれ

$$\mathbf{r}_0(t') = (0, 0, vt') \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\beta} = (0, 0, \beta) = (0, 0, \frac{v}{c}) \quad (3)$$

などである。加速度運動を伴わないため、輻射場である

$$\mathbf{E} = \frac{q}{c} \left[ \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{\kappa^3 R} \right] \quad (4)$$

はゼロになると思われるかもしれない。しかし、(1), (3) 式と屈折率  $n_r$  の媒質中では光の伝搬速度が  $c/n_r$  になることから

$$\kappa = 1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = 1 - n_r \beta \cos \theta \quad (5)$$

もゼロになりうる。よって無限遠方までエネルギーを運ぶ電磁放射の存在が期待されるのである。ではその放射がどのような特徴を持っているのか、具体的な計算と物理的な解釈を行っていこう。観測時間が十分長く、長時間平均を取るとすると、輻射場のフーリエスペクトルは

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{i\omega q}{2\pi c/n_r R} e^{i\omega \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c/n_r}} \int_{T'_1}^{T'_2} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) e^{i\omega(t' - \frac{\mathbf{r}_0(t') \cdot \mathbf{n}}{c/n_r})} dt' \quad (6)$$

ここで注意しておきたいのは  $\beta = v/(c/n_r)$  とはならないことである。 $\beta$  は荷電粒子の移動速度であり、屈折率が変わったからといって粒子の運動速度が変化することはない。 $\kappa$  は荷電粒子が時空図上で運動することにより生じるドップラー効果からくるものであるから、屈折率が1でない媒質中でその大きさが変わることは自然である。

今後の計算に必要なモノを先に用意しておく。(1), (2), (3) より

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta} = \beta \cos \theta \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \cos \theta \\ -\sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (7)$$

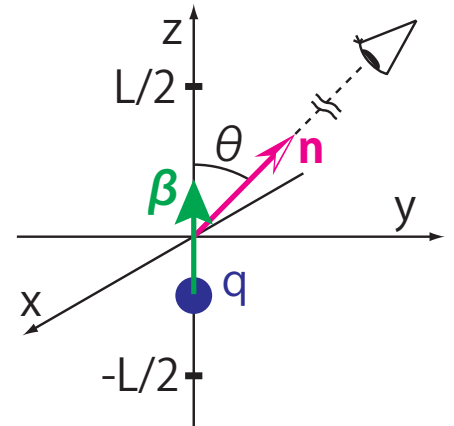


fig 1: 座標設定。

$$t' - \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}}{c/n_r} = t' - \frac{n_r}{c} vt' \cos \theta = (1 - n_r \beta \cos \theta) t' \quad (8)$$

また問題設定より  $T'_1 = -T'_2 = -L/(2v)$  である。粒子が  $z = -L/2$  から  $z = L/2$  まで駆け抜けるのに要する時間  $T' \equiv L/v$  を定義しておく。(7) 式の  $x$  成分より

$$\hat{E}_x = 0 \quad (9)$$

である。まずは (6) 式の  $y$  成分から計算していこう。

$$\begin{aligned} \hat{E}_y(\mathbf{r}, \omega) &= -\frac{i\omega q n_r}{2\pi c R} \beta \sin \theta \cos \theta e^{i\omega \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c/n_r}} \int_{-T'/2}^{T'/2} e^{i\omega(1-n_r\beta \cos \theta)t'} dt' \\ &= -\frac{i\omega q n_r}{2\pi c R} \beta \sin \theta \cos \theta e^{i\omega \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c/n_r}} \frac{e^{i\omega(1-n_r\beta \cos \theta)T'/2} - e^{-i\omega(1-n_r\beta \cos \theta)T'/2}}{i\omega(1-n_r\beta \cos \theta)} \\ &= -\frac{i\omega q n_r}{2\pi c R} \beta \sin \theta \cos \theta e^{i\omega \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c/n_r}} \frac{2i \sin \left\{ \omega(1-n_r\beta \cos \theta) \frac{T'}{2} \right\}}{i\omega(1-n_r\beta \cos \theta)} \\ &= -\frac{i\omega q n_r}{\pi c R} \beta \sin \theta \cos \theta e^{i\omega \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c/n_r}} \frac{T'}{2} \text{sinc} \left\{ \omega(1-n_r\beta \cos \theta) \frac{T'}{2} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

$\hat{E}_y$  と  $\hat{E}_z$  の違いは  $\sin \theta \cos \theta$  と  $-\sin^2 \theta$  の違いのみなので

$$\hat{E}_z(\mathbf{r}, \omega) = \frac{i\omega q n_r}{\pi c R} \beta \sin^2 \theta e^{i\omega \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c/n_r}} \frac{T'}{2} \text{sinc} \left\{ \omega(1-n_r\beta \cos \theta) \frac{T'}{2} \right\} \quad (11)$$

(10), (11) 式の sinc 関数の中について考えてみよう。 $T'$  の定義と合わせて

$$\omega(1-n_r\beta \cos \theta) \frac{T'}{2} = \frac{\omega}{c} \frac{L}{2v} (1-n_r\beta \cos \theta) = \frac{\omega}{c} L \frac{1}{2\beta} (1-n_r\beta \cos \theta) \quad (12)$$

$\omega/c$  は真空中での電磁波の波数である。よって粒子の走る距離  $L$  が十分長く  $\omega L/c \gg 1$  とすると、sinc 関数は  $1-n_r\beta \cos \theta \simeq 0$  でピークを持つような  $\delta$  関数的な振る舞いをすることがわかる。このことから、この電磁波の特徴を考えてみよう。

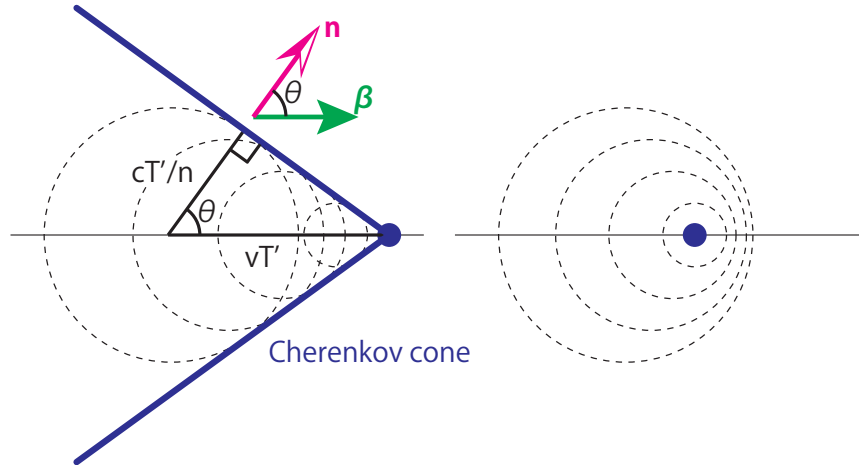


fig 2: 左図:  $vT' > cT'/n$  のとき、右図:  $vT' < cT'/n$  のとき

$$1 - n_r \beta \cos \theta = 0 \implies \frac{c}{n_r} = v \cos \theta \implies \underbrace{\frac{c}{n_r} T'}_{\times T'} = v T' \cos \theta \quad (13)$$

左辺は  $T'$  秒間に電磁波が到達する距離、右辺の  $vT'$  は荷電粒子の移動距離である。よってこの電磁波は半頂角  $\pi/2 - \theta$  の円錐状に強い強度を持って広がっていくことがわかる (fig2 参照)。また fig2 では異なる時刻に放出される球面波を 4 つ描いてみた。粒子の速度が速い左図では 4 つの球面波からさらに共通波面を見いだすことができる。ホイヘンスの原理から、この共通波面がチェレンコフ放射として観測されるのである。一方、右図では粒子の速度が遅いため、4 つの球面波から共通波面をつくり上げることはできない。すなわち荷電粒子の速度が遅く、(13) 式が満たされない時、チェレンコフ放射は観測されないことになる。

光速に近い速度で運動する荷電粒子が作る電磁場は相対論的ビーミングにより、fig2 で点線で描かれているような円形ではない。実際には、光速に近い速度で運動する点電荷によって置いてけぼりとなった電磁場が、fig3 の左図のように周囲の原子・分子に分極を起こさせる。これらの分極状態が元の中性の状態に戻るときに放射を出す。これらの重ね合わせが電磁的な衝撃波となり、チェレンコフ放射として我々に観測されるのである。一方で、荷電粒子の速度が媒質中の光速に比べて遅い場合は、周囲の物質の分極は等方的となる (fig3 の右図)。よってこれらの分極が元の状態に戻るときに放出される放射は打ち消しあい、我々には観測されない。

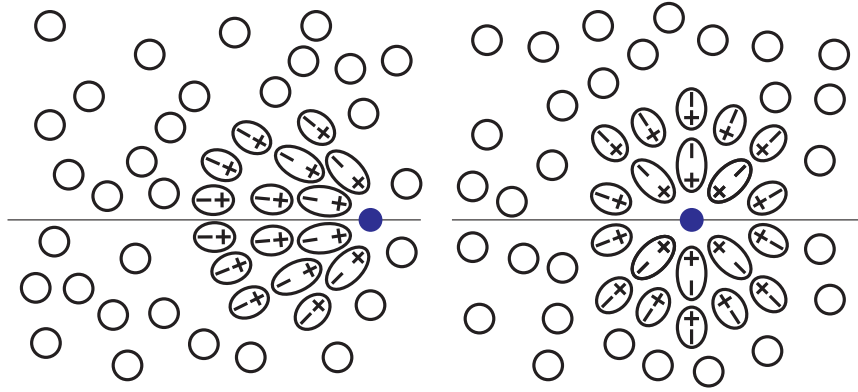


fig 3: 左図:  $vT' > cT'/n$  のとき、右図:  $vT' < cT'/n$  のとき

単位時間、単位周波数、単位立体角あたりの放射強度を求めよう。(10), (11) 式より

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\omega d\Omega dt'} &= \frac{c/n_r R^2}{T'} (|\hat{E}_x|^2 + |\hat{E}_y|^2 + |\hat{E}_z|^2) = \frac{q^2 n_r}{\pi^2 c} \omega^2 \beta^2 \sin^2 \theta \underbrace{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}_{=1} \frac{T'}{4} \text{sinc}^2 \left\{ \omega(1 - n_r \beta \cos \theta) \frac{T'}{2} \right\} \\ &\stackrel{T'=L/v}{=} \frac{q^2}{2\pi^2 c} \omega \beta \sin^2 \theta \frac{\omega L n_r \beta}{2c v/c} \text{sinc}^2 \left\{ \frac{\omega L n_r \beta}{2c v/c} \left( \frac{1}{n_r \beta} - \cos \theta \right) \right\} \\ &\stackrel{\text{sinc}^2 \text{ は even}}{=} \frac{q^2}{2\pi^2 c} \omega \beta \sin^2 \theta \frac{\omega L n_r}{2c} \text{sinc}^2 \left\{ \frac{\omega L n_r}{2c} \left( \cos \theta - \frac{1}{n_r \beta} \right) \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで  $a \text{sinc}^2 ab$  を  $b$  について区間  $[-\infty, \infty]$  で積分した値から

$$\int_{-\infty}^{\infty} a \text{sinc}^2(ab) db \stackrel{\alpha=ab}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2 \alpha d\alpha = \pi \implies \lim_{a \rightarrow \infty} a \text{sinc}^2 ab = \pi \delta(b) \quad (15)$$

と考えることができる。(12) 式の時と同様に考えると、 $\omega L n_r / 2c \rightarrow \infty$  と考えることができるので

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega dt'} = \frac{q^2}{2\pi c} \omega \beta \sin^2 \theta \delta \left( \cos \theta - \frac{1}{n_r \beta} \right)$$

これを立体角で積分しよう。

$$\frac{dW}{d\omega dt'} = \frac{q^2}{2\pi c} \omega \beta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^2 \theta \delta \left( \frac{1}{n_r \beta} - \cos \theta \right) \sin \theta d\theta \stackrel{\mu = \cos \theta}{=} \frac{q^2}{c} \omega \beta \int_{-1}^1 (1 - \mu^2) \delta \left( \mu - \frac{1}{n_r \beta} \right) d\mu$$

積分値がゼロでない値となる、すなわちチェレンコフ放射が存在するため条件は

$$\frac{1}{|n_r \beta|} < 1 \implies n_r \frac{v}{c} > 1 \implies v > \frac{c}{n_r} \quad (16)$$

となり、(5) 式や fig2 で議論した結果に一致する。

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dW}{d\omega dt'} &= \frac{q^2}{c} \omega \beta \left( 1 - \frac{1}{n_r^2 \beta^2} \right) \stackrel{t' \text{で積分}}{\implies} \frac{dW}{d\omega} = \frac{q^2}{c} \omega \beta \left( 1 - \frac{1}{n_r^2 \beta^2} \right) \int_{-T'/2}^{T'/2} dt' \stackrel{T' = L/v}{=} \frac{q^2}{c} \omega \beta \left( 1 - \frac{1}{n_r^2 \beta^2} \right) \frac{L}{c v/c} \\ &= \frac{q^2}{c^2} \omega \left( 1 - \frac{1}{n_r^2 \beta^2} \right) L \end{aligned}$$

よって単位周波数、単位距離あたりに荷電粒子が電磁波として放出する放射のエネルギーは

$$\frac{dW}{d\omega dz} = \frac{q^2 \omega}{c^2} \left( 1 - \frac{1}{n_r^2 \beta^2} \right) \quad (17)$$

この式はソビエト連邦 (現ロシア) の物理学者 Ilya Frank と Igor Tamm によって 1937 年に理論的に示された。これは Tamm-Frank formula (タム・フランクの式) と呼ばれている。チェレンコフ放射それ自体は同じくソビエトの物理学者 Pavel Cherenkov により 1934 年に発見されていたため、この両者はその 3 年後に理論体系を築き上げたことになる。「チェレンコフ効果の発見とその解釈」の事由により、3 者は 1958 年にノーベル物理学賞を受賞した。

この研究を礎として、近年ではチェレンコフ放射を利用してニュートリノ観測を行うことが話題となっている (2002 年ノーベル物理学賞の小柴昌俊、2015 年ノーベル物理学賞の梶田隆章と Arthur McDonald)。ニュートリノ自身は電荷を持たないが、ニュートリノが媒質中で電子をはじき出すあるいはニュートリノが原子核と反応しミューオンや電子を放出することによって、電荷を持った粒子が媒質中を駆け抜ける。これによりチェレンコフ放射が観測されるのである。

$E = \hbar \omega$  の光子数を  $N$  とすると

$$W = NE = \hbar \omega N \implies dW = \hbar \omega dN, \quad dE = \hbar d\omega \quad (18)$$

より、単位エネルギー単位距離あたりに荷電粒子が放出する光子数が

$$\frac{dN}{dE dz} = \frac{q^2}{\hbar^2 c^2} \left( 1 - \frac{1}{n_r^2 \beta^2} \right) = \frac{\alpha Z^2}{\hbar c} \left( 1 - \frac{1}{n_r^2 \beta^2} \right) \quad (19)$$

と求まる。途中  $q = Ze$ , 微細構造定数  $\alpha = e^2/\hbar c \sim 1/137$  を用いた。

## [ ? ] sinc<sup>2</sup> の積分

途中で出てきた sinc 関数の 2 乗の積分値を求めよう。そのために

$$W(t) = \begin{cases} 1 & (-T/2 < t < T/2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (20)$$

のような Top-hat 関数の Fourier 変換を考える。

$$\hat{W}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(t)e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\omega T/2} - e^{-i\omega T/2}}{i\omega} = \frac{T}{2\pi} \text{sinc}\left(\omega \frac{T}{2}\right)$$

ここで Parseval の公式より

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(t)^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{W}(\omega)|^2 d\omega = \frac{T^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(\omega \frac{T}{2}\right) d\omega \stackrel{\omega T/2=x}{=} \frac{T}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2 x dx$$

一方、

$$(\text{最左辺}) = \int_{-T/2}^{T/2} dt = T$$

より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2 x dx = \pi \quad (21)$$

が求まる。sinc 関数の積分値と sinc<sup>2</sup> 関数の積分値が同じ  $\pi$  となる不思議。

## 参考文献

- [1] Wolfram MathWorld website (<http://mathworld.wolfram.com/>)
- [2] 平川浩正, "新物理学シリーズ 12 電気力学", 培風館
- [3] 東北大学理学部物理学科 電気力学 (2008 年度開講, 担当教官: 中村哲) 授業ノート
- [4] 東北大学理学部宇宙地球物理学科 天体物理学 II (2008 年度開講, 担当教官: 服部誠) 授業テキスト