

10 Report ?. (presented by Sho Nakamura)

update:17/Apr/2011

[?] 中性水素原子からの 21cm(?) 線

非相対論的な速度で運動する電荷 q の荷電粒子が作る磁場の速度場成分は

$$\mathbf{B} = -q \frac{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}}{R^2} \quad (1)$$

と書ける。ここで $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$ であり、 \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 はそれぞれ観測者と荷電粒子の位置ベクトルである。簡単のため観測者のいる方向を yz 平面に取り

$$\mathbf{r} = r \sin \theta \mathbf{e}_y + r \cos \theta \mathbf{e}_z \quad (2)$$

のように書く。荷電粒子が

$$\mathbf{r}_0 = r_0 \cos \omega t \mathbf{e}_x + r_0 \sin \omega t \mathbf{e}_y \quad (3)$$

にしたがって原点のまわりを xy 平面内で運動しているとする。

?-1. $r \gg r_0$ の極限において r/r_0 の一次までの近似で

$$\frac{1}{R^3} = \frac{1}{r^3} + \frac{3r_0}{r^4} \sin \theta \sin \omega t \quad (4)$$

となることを示せ。

?-2. 粒子の円運動の 1 周期で平均することで位置 \mathbf{r} に荷電粒子が作る磁場が

$$B_x = 0 \quad (5)$$

$$B_y = \frac{3q\omega r_0^2}{2c} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^3} \quad (6)$$

$$B_z = -\frac{3q\omega r_0^2}{2c} \frac{\sin^2 \theta}{r^3} + \frac{3q\omega r_0^2}{2c} \frac{1}{r^3} \quad (7)$$

で与えられることを示せ。

?-3. ?-2 で得られた磁場の磁力線の様子を実際に図示せよ。

?-4. 磁荷 q_m の磁気単極子が存在したとして、それが静磁場が

$$\mathbf{B} = q_m \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (8)$$

で与えられるとする。 z 軸上 $(0, 0, d/2)$ に磁荷 q_m が、 $(0, 0, -d/2)$ に磁荷 $-q_m$ がそれぞれ存在したとしよう。このとき、この系の磁気モーメントは $\mu_m = q_m d$ である。 $r \gg d$ の極限でこれらの磁荷が作る磁場が

$$\mu_m = \frac{qL}{2mc} \quad (9)$$

と置き換えることにより、?-2 で得られた磁場と同じになることを示せ。ここで m, L はそれぞれ荷電粒子の質量と角運動量の大きさである。

?-5. ?-4 の結果は、「角運動量を持つ荷電粒子は磁気モーメントを持つ」ということを示している。水素原子は中心に大きさ $S = \hbar/2$ のスピン角運動量 (以下スピンと呼ぶ) を持つ陽子が存在し、その周りを電子が Bohr 半径

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{\hbar c}{m_e c^2} \frac{\hbar c}{e^2} \sim \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{0.5 \text{ MeV}} 140 = 5.6 \times 10^4 \text{ (fm)} = 5.6 \times 10^{-2} \text{ (nm)} \quad (10)$$

に等しい半径で円運動をしているとモデル化できる。陽子のスピンの向きを z 軸正方向、電子の円運動の軌道を xy 平面にとる。電子も大きさ $S_e = \hbar/2$ のスピンを持っているので、これに対応する磁気モーメントを持つ。それにより、陽子が作る磁場と相互作用している。電子のスピンの向きが陽子のスピンと平行の時と反平行の時のエネルギー差を eV 単位で求めよ。またそのエネルギー差に対応する電磁波の周波数および波長を求めよ。さらに、電子のスピンと陽子のスピンが平行・反平行のどちらのときがエネルギーが低い安定な状態であるかも答えよ。

[?]

中性水素原子からの 21cm 線について考えよう。非相対論的速度で運動する電荷 q の荷電粒子が作る磁場の速度場分布は

$$\mathbf{B} = -q \frac{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}}{R^2} \quad (11)$$

と書ける。ここで $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$ であり、 \mathbf{r} は観測者の位置ベクトルである。今は簡単のために観測者は yz 平面にいるとして、

$$\mathbf{r} = r \sin \theta \mathbf{e}_y + r \cos \theta \mathbf{e}_z \quad (12)$$

とする。 \mathbf{r}_0 は荷電粒子の位置ベクトルである。荷電粒子は

$$\mathbf{r}_0 = r_0 \cos \omega t \mathbf{e}_x + r_0 \sin \omega t \mathbf{e}_y \quad (13)$$

にしたがって原点の周りを xy 平面内で円運動しているとする。

6-1

$r \gg r_0$ の極限で $\frac{r_0}{r}$ の一次までの近似をとって $\frac{1}{R^3}$ を計算してみよう。

$$\mathbf{R} = -r_0 \cos \omega t \mathbf{e}_x + (r \sin \theta - r_0 \sin \omega t) \mathbf{e}_y + r \cos \theta \mathbf{e}_z$$

$$\Rightarrow R^2 = r_0^2 \cos^2 \omega t + (r \sin \theta - r_0 \sin \omega t)^2 + r^2 \cos^2 \theta = r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \sin \theta \sin \omega t = r^2 \left\{ 1 - 2 \frac{r_0}{r} \sin \theta \sin \omega t + \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right\}$$

$$\frac{1}{R^3} = \frac{1}{r^3 \left\{ 1 - 2 \frac{r_0}{r} \sin \theta \sin \omega t + \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right\}^{3/2}} \simeq \frac{1}{r^3} \left(1 + \frac{3}{2} \cdot 2 \sin \theta \sin \omega t \frac{r_0}{r} \right) = \frac{1}{r^3} + \frac{3r_0}{r^4} \sin \theta \sin \omega t \quad (14)$$

6-2

この円運動する荷電粒子が作る磁場を計算しよう。

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = -r_0\omega \sin \omega t \mathbf{e}_x + r_0\omega \cos \omega t \mathbf{e}_y \implies \boldsymbol{\beta} = \frac{\dot{\mathbf{r}}_0}{c} = \frac{r_0\omega}{c}(-\sin \omega t \mathbf{e}_x + \cos \omega t \mathbf{e}_y)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \times \boldsymbol{\beta} &= \begin{pmatrix} -r_0 \cos \omega t \\ r \sin \theta - r_0 \sin \omega t \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \times \frac{r_0\omega}{c} \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{r_0\omega}{c} \begin{pmatrix} -r \cos \theta \cos \omega t \\ -r \cos \theta \sin \omega t \\ -r_0 \cos^2 \omega t + r \sin \theta \sin \omega t - r_0 \sin^2 \omega t \end{pmatrix} \\ &= \frac{r_0\omega}{c} \begin{pmatrix} -r \cos \theta \cos \omega t \\ -r \cos \theta \sin \omega t \\ r \sin \theta \sin \omega t - r_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} (11), (15) \implies \mathbf{B} &= -\frac{q}{R^3} \mathbf{R} \times \boldsymbol{\beta} = -\frac{q}{R^3} \frac{r_0\omega}{c} \begin{pmatrix} -r \cos \theta \cos \omega t \\ -r \cos \theta \sin \omega t \\ r \sin \theta \sin \omega t - r_0 \end{pmatrix} \stackrel{(14)}{\simeq} \frac{qr_0\omega}{c} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{3r_0}{r^4} \sin \theta \sin \omega t \right) \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \omega t \\ r \cos \theta \sin \omega t \\ r_0 - r \sin \theta \sin \omega t \end{pmatrix} \\ &= \frac{qr_0\omega}{cr^3} \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \omega t \\ r \cos \theta \sin \omega t \\ r_0 - r \sin \theta \sin \omega t \end{pmatrix} + \frac{3qr_0^2\omega}{cr^4} \sin \theta \sin \omega t \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \omega t \\ r \cos \theta \sin \omega t \\ r_0 - r \sin \theta \sin \omega t \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

これを荷電粒子の円運動の一周期で平均しよう。

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos \omega t \, dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin \omega t \, dt = 0$$

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin \omega t \cos \omega t \, dt = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin 2\omega t \, dt = 0$$

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t \, dt = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (1 - \cos 2\omega t) \, dt = \frac{1}{2}$$

などより

$$\mathbf{B} = \frac{qr_0\omega}{cr^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_0 \end{pmatrix} + \frac{3qr_0^2\omega}{cr^4} \sin \theta \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}r \cos \theta \\ -\frac{1}{2}r \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{qr_0^2\omega}{cr^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3qr_0^2\omega}{2cr^3} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \cos \theta \\ -\sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (17)$$

6-3

実際に (17) 式を書き出すと fig1 のようになる。

6-4

磁荷 q_m の磁気単極子が存在したとして、それが作る静磁場が

$$\mathbf{B} = \frac{q_m \mathbf{R}}{R^3} \quad (18)$$

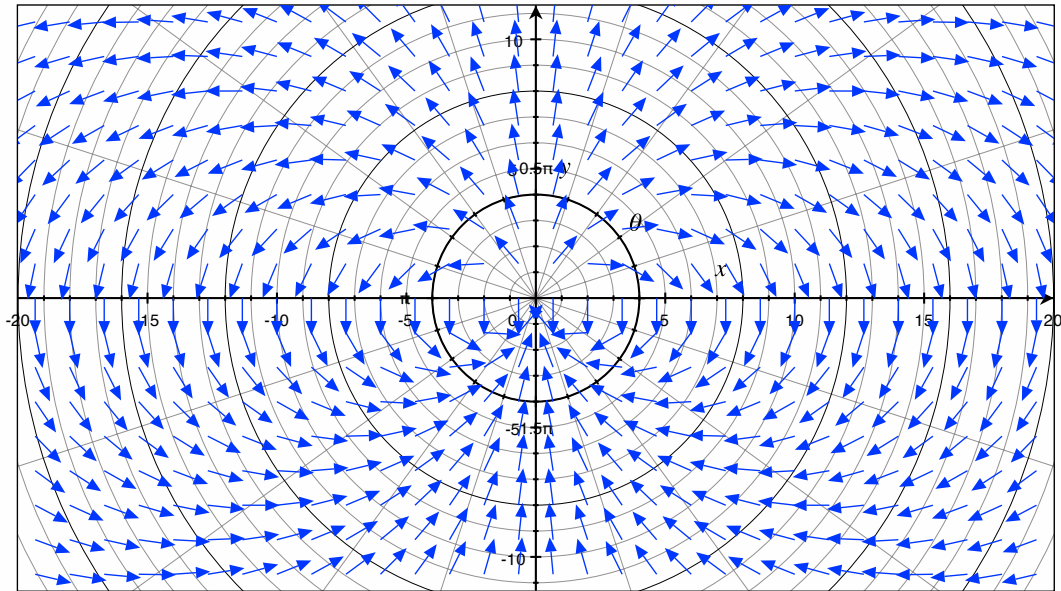


fig 1: 磁場ベクトルを書き出した図。

で与えられるとする。z 軸上 $(0, 0, d/2)$ に磁荷 q_m が、 $(0, 0, -d/2)$ に磁荷 $-q_m$ が存在するとする。このとき $\mu_m = q_m d$ がこの系の磁気モーメントである。 $r \gg d$ の極限でこの磁気モーメントが作る磁場を考えよう。観測者が感じる磁場は

$$\mathbf{B} = \frac{q_m}{R_+^3} \mathbf{R}_+ - \frac{q_m}{R_-^3} \mathbf{R}_-$$

$$\begin{cases} \mathbf{R}_+ = r \sin \theta \mathbf{e}_y + \left(r \cos \theta - \frac{d}{2} \right) \mathbf{e}_z \\ \mathbf{R}_- = r \sin \theta \mathbf{e}_y + \left(r \cos \theta + \frac{d}{2} \right) \mathbf{e}_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_+^2 = r^2 - dr \cos \theta + \frac{d^2}{4} = r^2 \left\{ 1 - \frac{d}{r} \cos \theta + 4 \left(\frac{d}{r} \right)^2 \right\} \\ R_-^2 = r^2 + dr \cos \theta + \frac{d^2}{4} = r^2 \left\{ 1 + \frac{d}{r} \cos \theta + 4 \left(\frac{d}{r} \right)^2 \right\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{R_+^3} = \frac{1}{r^3 \left\{ 1 - \frac{d}{r} \cos \theta + 4 \left(\frac{d}{r} \right)^2 \right\}^{3/2}} \simeq \frac{1}{r^3} \left(1 + \frac{3}{2} \cos \theta \frac{d}{r} \right) \\ \frac{1}{R_-^3} = \frac{1}{r^3 \left\{ 1 + \frac{d}{r} \cos \theta + 4 \left(\frac{d}{r} \right)^2 \right\}^{3/2}} \simeq \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{3}{2} \cos \theta \frac{d}{r} \right) \end{cases}$$

$$\mathbf{B} \simeq \frac{q_m}{r^3} \left(1 + \frac{3}{2} \cos \theta \frac{d}{r} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ r \sin \theta \\ r \cos \theta - d/2 \end{pmatrix} - \frac{q_m}{r^3} \left(1 - \frac{3}{2} \cos \theta \frac{d}{r} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ r \sin \theta \\ r \cos \theta + d/2 \end{pmatrix} = \frac{\mu_m}{r^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \sin \theta \cos \theta \\ 2 - 3 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (19)$$

(17) 式と (19) 式を一致させたい。そのためには両式を比較して

$$\mu_m = \frac{qr_0^2 \omega}{2c} = \frac{\overbrace{qmr_0^2 \omega}^{\text{角運動量}}}{2mc} = \frac{qL}{2mc} \quad (20)$$

と置き換えることで決着がつくことがわかる。

6-5

6-4の結果は角運動量を持つ荷電粒子は磁気モーメントを持つことを示している。水素原子は中心にスピン角運動量 $S = \hbar/2$ を持つ陽子が存在し、その周りを電子がボーア半径 $a_0 = \hbar^2/m_e e^2$ に等しい半径の円運動をしているとモデル化できる。陽子のスピン角運動量は z 軸正の向きを向いているとし、電子の軌道は xy 平面内にあるとしよう。電子はスピン角運動量 $S_e = \hbar/2$ を持ち、これに対応する磁気モーメントを持つ。そのため陽子が作る磁場と相互作用している。電子のスピンの向きが陽子のスピンと平行のときと反平行のときのエネルギー差がどのくらいかを見積もってみよう。

陽子の磁気モーメントは

$$\mu_p = \frac{e}{2m_p c} \frac{\hbar}{2} = \frac{e\hbar}{4m_p c} \tag{21}$$

(19) 式の μ_m を μ_p に置き換えれば、それは陽子が原点にいるときにスピン角運動量によって作られる磁場となる。電子が陽子から距離 r , 角度 $\theta = \pi/2$ にいるときに感じる磁場は

$$\mathbf{B} = -\frac{e\hbar}{4m_p c} \frac{1}{r^3} \mathbf{e}_z \tag{22}$$

磁場 \mathbf{B} 中に磁気モーメント μ を置いたときのエネルギーは

$$U = -\mu \cdot \mathbf{B} \tag{23}$$

で与えられる。電子のスピンの向きが陽子のスピンと平行 (磁気モーメントは反平行) のとき

$$U_{\text{up}} = -\frac{-e}{2m_e c} \frac{\hbar}{2} \mathbf{e}_z \cdot \left(-\frac{e\hbar}{4m_p c} \frac{1}{r^3} \right) \mathbf{e}_z = -\frac{e^2 \hbar^2}{16m_e m_p c^2} \frac{1}{r^3} \tag{24}$$

電子のスピンの向きが陽子のスピンと反平行 (磁気モーメントは平行) のとき

$$U_{\text{down}} = -\frac{-e}{2m_e c} \left(-\frac{\hbar}{2} \right) \mathbf{e}_z \cdot \left(-\frac{e\hbar}{4m_p c} \frac{1}{r^3} \right) \mathbf{e}_z = \frac{e^2 \hbar^2}{16m_e m_p c^2} \frac{1}{r^3} \tag{25}$$

よって fig2 のように、電子と陽子のスピンの向きが平行のときの方が安定、磁気モーメントとしては反平行のときが安定、ということがわかる。電子の電荷がマイナスであることを忘れないように注意しよう。

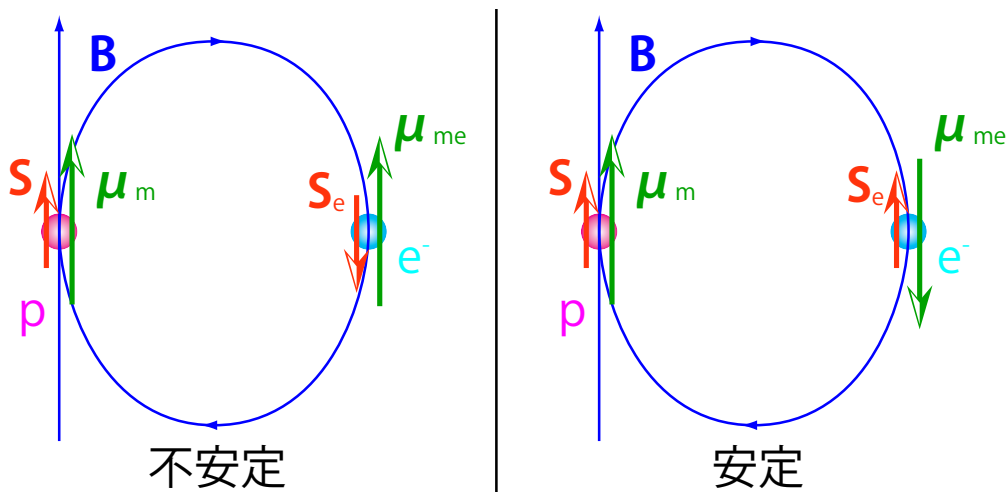


fig 2: 陽子のスピンの作る磁場と電子の磁気モーメントの向きによる安定・不安定。

電子が $r = a_0 = \hbar^2/m_e e^2$ にいるときのエネルギー差を具体的に計算すると

$$E = U_{\text{down}} - U_{\text{up}} = \frac{e^2 \hbar^2}{8 m_e m_p c^2} \frac{1}{a_0^3} = \frac{1}{8} \frac{e^2 \hbar^2}{m_e m_p c^2} \frac{m_e^3 e^6}{\hbar^6} = \frac{1}{8} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^4 \frac{(m_e c^2)^2}{m_p c^2} \sim \frac{1}{8} \frac{1}{137^4} \frac{(511 \text{keV})^2}{938 \text{MeV}} \sim 9.9 \times 10^{-8} \text{ (eV)}$$

電子のスピンが $\text{down}(-\hbar/2)$ から $\text{up}(\hbar/2)$ に遷移したときにこのエネルギーを持つ光子が放出される。波長に直してみよう。

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 2\pi \frac{\hbar c}{\lambda} \simeq 2\pi \frac{197 \text{MeV} \cdot \text{fm}}{\lambda} \sim 9.9 \times 10^{-8} \text{ (eV)} \implies \lambda \sim \frac{2\pi \times 197 \times 10^6}{9.9 \times 10^{-8}} \text{ (fm)} \sim 1.3 \times 10^3 \text{ (cm)}$$

実際にこの波長の電磁波が観測されているかという、実はそうではない。実際に量子力学を用いて厳密にこの遷移のエネルギー差を計算すると、21cmの波長(振動数では1.4 GHz)に相当するエネルギーを持った光子が放出されることが知られており、実際に観測もされている。中性水素は宇宙に広く存在するため、21cmの観測は銀河の回転速度の解析など、天文学では様々な用途がある。