08 Report 8.

[1] 球状星間雲の散乱光の観測

中心に明るい点状天体を含む球状の一様な星間雲があるとしよう。星間雲は完全電離しており、自由電子が飛び交っている。この電子により、中心天体から放出された電磁波が Thomson 散乱を受けるとする。この雲はこの散乱光にのみより観測可能とする。また光源から放射後、雲を抜けるまでの電磁波の散乱回数は最大 1 回とせよ。

1-1. この星間雲の見かけのサイズより観測装置の空間分解能が十分に高いとき、雲の各場所での偏光の方向と偏光度の相対的大きさを図示せ。

1-2. この星間雲の見かけのサイズより観測装置の空間分解能が悪く、この雲が分解して見えないときの偏光観測の結果はどのようなものになるか考察せよ。

1-3. この雲の大きさを 1Mpc($= 3.086 \times 10^{18} \times 10^{6}$cm) とする。中心天体が直接観測できるための電子の個数密度の上限値を求めよ

[2] Debye 波長の算出

プラズマの温度が $T = 10^4$K、電子数密度が $n_e = 1\mathrm{cm}^{-3}$ として、Debye 波長

$$\lambda_{\mathrm{D}} \equiv \sqrt{\frac{k_B T}{4\pi e^2 n_e}} \tag{1}$$

を求めよ。さらに半径が Debye 波長に等しい球内に含まれる全電子数を求めよ。

[3] プラズマの電気的中性

中心に点電荷 q_0 が存在するときのプラズマ中の静電ポテンシャルは

$$\phi = \frac{q_0}{r} e^{-\frac{r}{\lambda_{\mathrm{D}}}} \tag{2}$$

と書ける。空間全体で電荷分布を積分したとき、全電荷がゼロであることを示せ。

[4] 弱結合プラズマの物理的性質の理解

4-1. プラズマの粒子間の Coulomb ポテンシャルエネルギーと熱運動のエネルギーの比を Γ とおく。これと Debye length 内の電子数 Λ_c の間に

$$\Gamma \simeq \frac{1}{\Lambda^{2/3}} \tag{3}$$

の関係が満たされることを示せ。

4-2. 電子のイオンによる散乱の平均自由行程 λ_e と Debye lengthλ_{D} の比が

$$\frac{\lambda_{\mathrm{D}}}{\lambda_e} \simeq \Gamma^{3/2} \tag{4}$$

で与えられることも示せ。

4-3. 以上の結果を用いて、弱結合プラズマでは Debye shielding は無衝突プラズマの現象であり、非常に多数の電子が協調的に関与していることを示せ。

[5] プラズマ振動

$+e$ に帯電したイオンの海を考える。イオンは密度 n_i で一様に分布しているとする。そこに自由に動き回れる電荷 $-e$ の電子が一様に分布して、全体で電気的中性を保っているとする (すなわち電子の密度は $n_e = n_i$)。イオンは電子に比べて質量が圧倒的に大きいため慣性が大きく、ほとんど動かないと考えてよい。そこでイオンは常に静止しているとする。何らかの理由で電子の分布が全体で fig1 のようにズレたとする。

5-1. 領域 A における電場を求めよ。

5-2. 領域 A 内の任意の電子の運動方程式を立て、電子が角振動数

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}} \tag{5}$$

の単振動をすることを示せ。さらに $n_e = 1\mathrm{cm}^{-3}$ のとき何 Hz かも計算せよ。

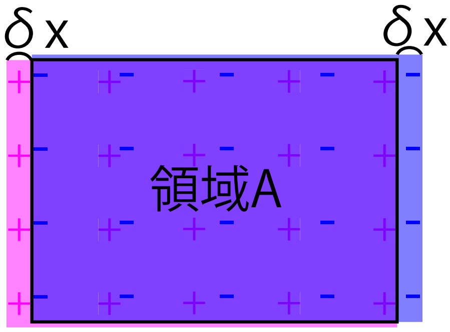

fig 1: イオンの海と少しずれて分布した電子の海

[6] プラズマ中を伝播する電磁波

温度 0 のプラズマ中を伝播する電磁波を考えよう。簡単のため、直線偏光した電磁波を考える。以下、電子とイオンの電荷密度は等しく至る所で n で、全電荷密度は常に 0 とし、イオンは静止しているものとする。電磁波の電場・磁場、および電磁波によって引き起こされる電子の運動速度は

$$\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{v} \propto e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \tag{6}$$

と書けるとする。また電磁波によって引き起こされる電子の運動は非相対論的な運動であるとする。

6-1. Maxwell 方程式より

$$i\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0, \ \ i\mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0, \ \ i\mathbf{k}\times\mathbf{E} = \frac{i\omega}{c}\mathbf{B}, \ \ i\mathbf{k}\times\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}(-en\mathbf{v}) - \frac{i\omega}{c}\mathbf{E} \tag{7}$$

を示せ。

6-2. 電子の運動方程式から

$$\mathbf{v} = \frac{e}{i\omega m_e}\mathbf{E} \tag{8}$$

6-3. 6-1, 6-2 より

$$\left(\frac{c}{\omega}k^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega c} - \frac{\omega}{c}\right)\mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{9}$$

を示せ。ただし $\omega_{pe} = \sqrt{\dfrac{4\pi e^2 n}{m_e}}$ である。

6-4. 6-3 の結果よりプラズマ中を伝播する電磁波の分散関係式を導け。

6-5. 系を伝わる波の位相速度を出し、それが $k \to 0$ 極限で発散することを示せ。またこの結果は速度が光速を超えているという意味で、相対論の光速度不変の原理を破っているかのように見えるが、相対論とは矛盾していないということを説明せよ。

[7] 電磁波の複素数表示と右・左周り円偏光の偏光ベクトル

fig2 のように偏光ベクトル $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2$ を定義する。これらは互いに直行する単位ベクトル、$\mathbf{n}$ は電磁波の進行方向を表す単位ベクトルである。実数部が実際の成分を表すと約束して電場成分を

$$\mathbf{E} = a_1 e^{-i(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\delta_1)}\boldsymbol{\epsilon}_1 + a_2 e^{-i(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\delta_2)}\boldsymbol{\epsilon}_2 = (a_1\boldsymbol{\epsilon}_1 + a_2 e^{-i\delta}\boldsymbol{\epsilon}_2)e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\delta_1)} \quad (\delta \equiv \delta_2 - \delta_1) \tag{10}$$

のように書く。ただし a_1, a_2 は実数である。

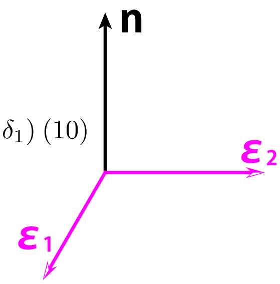

fig 2: $\mathbf{n}, \boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2$ の関係。

7-1. (10) 式のとき、電場の振幅の 2 乗は $\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*$ で計算できることを示せ。$*$ は複素共役を取るという意味である。

7-2. 円偏光の場合、$a_1 = a_2 = E_0$ である。したがって、右回り円偏光のとき

$$\mathbf{E} = \sqrt{2}E_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\delta_1)}\boldsymbol{\epsilon}_- \quad \left(\boldsymbol{\epsilon}_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2)\right) \tag{11}$$

左回り円偏光のとき

$$\mathbf{E} = \sqrt{2}E_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\delta_1)}\boldsymbol{\epsilon}_+ \quad \left(\boldsymbol{\epsilon}_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2)\right) \tag{12}$$

と書けることを示せ。ここで $\boldsymbol{\epsilon}_+, \boldsymbol{\epsilon}_-$ はそれぞれ電磁波の helicity が正・負の時の円偏光の偏光ベクトルである。

7-3.

$$\boldsymbol{\epsilon}_+\cdot\boldsymbol{\epsilon}_+^* = \boldsymbol{\epsilon}_-\cdot\boldsymbol{\epsilon}_-^* = 1,\ \ \boldsymbol{\epsilon}_+\cdot\boldsymbol{\epsilon}_-^* = \boldsymbol{\epsilon}_-\cdot\boldsymbol{\epsilon}_+^* = 0,\ \ \mathbf{n}\times\boldsymbol{\epsilon}_+^* = i\boldsymbol{\epsilon}_+^*,\ \ \mathbf{n}\times\boldsymbol{\epsilon}_-^* = -i\boldsymbol{\epsilon}_-^* \tag{13}$$

を示せ。

7-4. 任意の電磁波の電場成分は 2 つの直行する直線偏光の重ね合わせとして (10) 式のように書くことができる。これを書き換えて、右回り・左回りの円偏光の重ね合わせとして

$$\mathbf{E} = (E_+\boldsymbol{\epsilon}_+ + E_-\boldsymbol{\epsilon}_-)e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \tag{14}$$

のように書けることを示せ。この式で出てきた E_+, E_- も $a_1, a_2, \delta_1, \delta_2$ を用いて書き表せ。

7-5. $\boldsymbol{\epsilon}_1$ 方向に直線偏光した電磁波を右回り・左回りの 2 つの円偏光の重ね合わせで表せ。

[8] 一様磁場中での荷電粒子の運動

z 軸方向を向いた一様磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ のもとでの質量 m、電荷 q の粒子の運動を考える。
8-1. 運動方程式を解き、初速度が $\mathbf{v} = (0, v_0, 0)$ として粒子の軌跡を求めよ。
8-2. 結論から言うと、粒子は円運動をする。その角周波数 (cyclotron frequency) と回転半径 (Larmor radius) を求めよ。
8-3. 粒子の電荷の正負に関わらず、粒子の回転によって生じる電流が作る磁場は、一様磁場を打ち消す方向になることを示せ。
8-4. $B_0 = 1\mu\mathrm{G}$ で粒子が電子であるときの electron cyclotron frequency $\omega_{\mathrm{ce}} = \dfrac{eB_0}{m_e c}$ を求めよ。

[9] 電子の自己エネルギーと古典電子半径

原点に静止する電子が作る自己電場の全エネルギーを求めよ。ただし、電子は半径 r_0 の球とし、$r < r_0$ では電荷分布が一様で全電荷が e であるとする。また、求めた全自己電場エネルギーが電子の静止質量エネルギーと等しいとして r_0 を m_e, c, e を用いて表せ。