08 Report 7.

[1] radiation back reaction

質量 m_e、電荷 $-e$ の電子が

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x \tag{1}$$

にしたがって運動しているとする。以下では電子の運動は $\dot{x} \ll c$ を満たし、非相対論的極限で扱えるとする。
1-1. $t = 0$ で $x = 0, \dot{x} = 0$ を満たす解を求めよ。また、この系の全力学的エネルギーが $E = \frac{1}{2} m_e \omega_0^2 x_0^2$ で与えられることを示せ。
1-2. この電子は加速度運動をしているため輻射を放出し、力学エネルギーを失っていく。Larmor の公式を用いて、電子が放出する輻射のエネルギーの振動の 1 周期あたりの平均値 $< P >$ を求めよ。
1-3. 電子が輻射を放出することにより初期に持っていた全力学的エネルギーを失う時間 $t_{\mathrm{rad}} = E / < P >$ を計算し、$t_{\mathrm{rad}} = 1/(\tau \omega_0^2)$ となることを示せ。ここで

$$\tau \equiv \frac{2e^2}{3 m_e c^3} \tag{2}$$

である。この τ の具体的な数値も求めよ。さらに $\tau \omega_0 = 1$ となる振動数 $\nu_0 = \omega_0/(2\pi)$ を計算し、それを電磁波の波長に換算せよ。
1-4. ここで扱っている単振動する電子のモデルは、原子に束縛された電子がエネルギー準位を遷移して、エネルギー $\hbar \omega_0$ の photon を放出する過程の古典的モデルと考えることができる。ほとんどの自然界に存在する原子で $\tau \omega_0 \ll 1$ が成立している。したがって振動の 1 周期の間での輻射の放出によるエネルギー損失は無視できるほど小さく、輻射放出による電子のエネルギー損失率は、角振動数 ω_0 で単振動しているとして求めた輻射放出によるエネルギー放出率で一定という、第 0 近似で考えても差し支えない。そこで原子に束縛された電子が輻射を放出してエネルギー準位を戦死する過程を

$$\ddot{x} = -\frac{\dot{x}}{t_{\mathrm{rad}}} - \omega_0^2 x = -\omega_0^2 \tau \dot{x} - \omega_0^2 x \tag{3}$$

のように表すことができるとする。エネルギー損失に関する項として、速度 $\dot{x}$ に比例する項を入れることで輻射減衰を考慮した式である。コレを解いて $t = t_{\mathrm{rad}}$ で電子の全力学的エネルギーが e^{-1} となることを示せ。次に求めた解の Fourier スペクトルを求めよ。さらに text(2.51) 式を用いることで、放出される輻射のエネルギースペクトルを求めよ。

[2] 電子による円偏光電磁波の散乱および無偏光電磁波の散乱

左回りに円偏光した角周波数 ω_0 の電磁波が質量 m_e 電荷 $-e$ の自由電子にぶつかった。電磁波は z 軸正の方向に進行するとし、電子は $z = 0$ 平面内にいるとする。また、電子の速度は光速度 c に比べて十分小さいとする。
2-1. 電子の運動方程式を導け。電磁波の電場は $z = 0$ 平面内で

$$E_x(t) = E_0 \cos \omega_0 t \tag{4}$$

$$E_y(t) = E_0 \sin \omega_0 t \tag{5}$$

のように時間変化するとする。また電子の運動が非相対論的なので、電磁波の磁場による力 (Lorentz 力) は無視する。

2-2. z 軸となす角 θ の $\mathbf{n}$ 方向に散乱される電磁波の微分散乱断面積を以下の手順にしたがって求めよ。簡単のため $\mathbf{n}$ は yz 平面内にあるする。

a) 電磁波の入射により電子は 2-1 で導いた運動方程式に従って加速度運動する。それにより電子は電磁波を放射する。以下、この電子による 2 次波の放射の性質を調べることで左回りに円偏光した電磁波の電子による散乱の詳細を調べる。x, y, z 方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ とする。そして偏光方向を表す単位ベクトルを $\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2$ とする。$\hat{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{e}_x$ のように取ったとき、$\mathbf{n}, \hat{\mathbf{a}}_2$ を e_y, e_z を用いて表せ。

b) Radiation field の電場

$$\mathbf{E}_{\mathrm{rad}} = \left[\frac{q}{Rc^2}\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{u}})\right] \tag{6}$$

を求めよ。ただし基底ベクトルは $\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2$ を用いること。さらに観測者から電子までの距離 R は電子の運動による距離の変化に比べて十分に大きく、電子の運動による距離の変化を無視できるとして扱え。

c) $\mathbf{n}$ の方向に放射される電磁波の単位時間・単位立体角あたりのエネルギー (the power per solid angle)$\dfrac{dP}{d\Omega}$ を求めよ。次にこれの時間平均 $\left\langle \dfrac{dP}{d\Omega} \right\rangle$ を計算せよ。

d) 次に散乱波の偏光を調べる。$\mathbf{n}$ 方向に散乱された電磁波の $\hat{\mathbf{a}}_1$ 方向と $\hat{\mathbf{a}}_2$ 方向の電場の位相差 $\delta_2 - \delta_1$、およびその電場の振幅と 4 つの Stokes parameters、そして偏光度を求めよ。そして θ を $0 \sim \pi$ まで変化させるにつれて偏光の様子がどうなるかを説明せよ。

e) 左回り円偏光の電磁波に対する微分散乱断面積を求めよ。

f) 円偏光に対するここまでの結果を用いて、無偏光の電磁波に対する微分散乱断面積、および全散乱断面積を求めよ。ここで、無偏光を「互いに位相が無相関で同じ強度の右回り円偏光と左回り円偏光からなる」として扱う。また散乱波が $\hat{\mathbf{a}}_1$ 方向に直線偏光しており、偏光度が $\dfrac{1-\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}$ であることを示せ。

[3] mean-free-pass

現在の宇宙は電子密度 $n_e \sim 2 \times 10^{-7}(\mathrm{cm}^{-3})$ でほぼ完全電離した状態にある。宇宙が現在の姿のまま永遠に存在しているとして、直接観測できる一番遠くの天体までの距離を cm および pc、光年単位で求めよ。

[4] eV・温度・周波数・波長換算

$E = 1\mathrm{eV}$ を $E = k_B T$ の関係を用いて温度に換算せよ。次に $E = h\nu, c = \nu\lambda$ の関係式を用いて 1eV を photon の周波数 (単位は Hz で) と波長 (cm, μm, $\AA$ 単位の 3 種類) を求めよ。

[5] Poisson equation を満たす potential と湯川型 potential の導出

Fourier 変換の方法を使って、

2-1.

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -4\pi q_0 \delta^3(\mathbf{r}) \tag{7}$$

2-2.

$$(\Delta - \mu^2)\phi(\mathbf{r}) = -4\pi q_0 \delta^3(\mathbf{r}) \tag{8}$$

の方程式の解を求めよ。

[6] pion, Strong interaction(強い力) について

原子核同士を結びつけている「強い力 (核力)」は、核間距離が $1\text{fm} = 10^{-13}\text{cm}$ 以内では非常に強くはたらくが、これ以上離れるとほとんど力がはたらかない、という性質を持つ。これは核力を媒介する粒子である π 中間子 (パイオン) が有限の質量を持っていることから起因するとして、π 中間子の質量 $m_\pi c^2$ を MeV 単位で以下に説明する方法で求めよ。
π 中間子のエネルギーの不確定性が高々$m_\pi c^2$ 程度であるとし、不確定性原理から π 中間子の寿命を求める。その寿命の間に光速度で伝わることができる距離が核力の到達距離として見積もる。ここでの計算には $\hbar c = 197\text{Mev fm}, c = 3 \times 10^{10}\text{cm}$ を用いるとよい。

[7] 熱・統計力学の復習

温度 T で熱平衡状態にある質量 m の粒子系では、ある粒子のエネルギーが $E \sim E + dE$ の範囲にある確率は

$$P(E)dE \propto e^{-\frac{E}{k_B T}} dE \tag{9}$$

と与えられる。特に自由な (外部からのポテンシャル等の影響のないような) 非相対論的運動をしている粒子系では、速度が $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \sim \mathbf{v} + d\mathbf{v} = (v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z)$ の範囲に粒子がいる確率は、$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ を用いて

$$P(v)dv_x dv_y dv_z \propto e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv_x dv_y dv_z \tag{10}$$

のように書くことができる。すなわち $P(v) = Ce^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$ である。
7-1. 全確率が 1 に成るように規格化定数 C を求めよ。
7-2. 粒子 1 個の平均の運動エネルギーを求めよ。
7-3. Coulomb potential$\phi(\mathbf{r})$ が存在するときは、電子の全エネルギーは $E = \dfrac{1}{2}mv^2 - e\phi(\mathbf{r})$ となる。電子は体積 V の領域に存在するとして、ある位置 $\mathbf{r} \sim \mathbf{r} + d\mathbf{r}$ で電子が見つかる確率が

$$P(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} = \frac{e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}} d^3\mathbf{r}}{A}, \;\; A \equiv \int_V e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}} d^3\mathbf{r} \tag{11}$$

で表されることを示せ。
7-4. $V \to \infty$ の極限を考え、無限遠方で $\phi(\mathbf{r}) = 0$ とする。無限遠での電子の数密度を n_0 とするとき、任意の位置 $\mathbf{r}$ での電子の数密度が

$$n_e(\mathbf{r}) = n_0 e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}} \tag{12}$$

で与えられることを示せ。