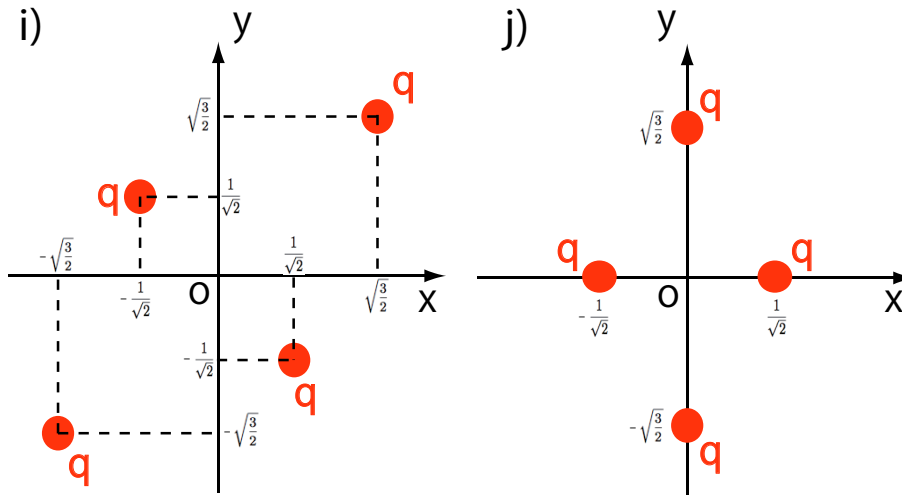


08 Report 6.

[1] dipole moment, quadropole moment その2, spin の考察

a) 以下の図で与えられる電荷分布について、双極子モーメントと四重極子モーメントをそれぞれ求めよ。



b) 前回求めた図 (g) の結果を図 (i) の結果から差し引いて、これらの差の双極子モーメントと四重極子モーメントを求めよ。同様のことを (j)-(h) についても計算せよ。

c) 紙面に垂直な方向を軸として反時計回りに座標を角度 θ 回転する座標変換を考える。このとき、任意のベクトル $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ および 2×2 行列 T は次の式で表されるように変換される。

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{A}' = U\mathbf{A} \quad (2)$$

$$T' = UTU^{-1} \quad (3)$$

そこで、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

これらのベクトルおよび行列の成分がどのように変換されるかを計算して、それらのスピンの 1 or 2 であることを示せ。

[2] 連続媒質からの放射、乱雑位相近似

連続媒質からの放射として N 個の電子からなる系を考える。各電子はパルス上の電磁波を放射しており、その波形は共通で $E_0(t)$ であるとする。各電子からのパルスが観測者に到着する時刻を $t_i (i = 1, 2, 3, \dots, N)$ とし、到着時刻は random であるとする。観測者が観測する電磁波の電場はこれらの全ての重ね合わせで

$$E(t) = \sum_{i=1}^N E_0(t - t_i) \quad (5)$$

である。

2-1. $E(t)$ の Fourier スペクトルが、 $E_0(t)$ の Fourier スペクトル $\hat{E}_0(\omega)$ を用いて

$$\hat{E}(\omega) = \hat{E}_0(\omega) \sum_{i=1}^N e^{i\omega t_i} \quad (6)$$

のようになることを示せ。

2-2. N が十分大きい数として

$$\left| \sum_{i=1}^N e^{i\omega t_i} \right|^2 = N \quad (7)$$

が近似的に成り立つことを示せ。

2-3. 観測される電磁波のスペクトルが

$$\frac{dW}{dAd\omega} = cN \left| \hat{E}_0(\omega) \right|^2 \quad (8)$$

であることを示せ。

2-4. もし全ての電子が放射する電磁波の波長より十分に小さい領域に存在し、電子たちが同時に電磁波を放射したとしたら、観測される電磁波のスペクトルが

$$\frac{dW}{dAd\omega} = cN^2 \left| \hat{E}_0(\omega) \right|^2 \quad (9)$$

となることを示せ。

[3] 2本の dipole antenna からの放射

平行に置かれた 2 本の dipole antenna からの放射を考える。dipole antenna を antenna に平行な dipole moment $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ で置き換えよう。 $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ は振幅がそれぞれ d_1, d_2 、角振動数 ω であり、in phase(同位相)で振動しているとする。antenna の向きは z 軸とし、2つの antenna の中心はそれぞれ $(x, y) = (0, \pm\ell/2)$ であるとする。

a) xy 平面内の antenna から十分離れた点で、antenna からの電磁波を観測したとする。観測者の位置ベクトルと x 軸とのなす角を θ とする。この点での the power per solid angle が、長時間平均で

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} (d_1^2 + 2d_1 d_2 \cos \delta + d_2^2) \quad (10)$$

$$\delta \equiv \frac{\omega \ell \sin \theta}{c} \quad (11)$$

となることを示せ。

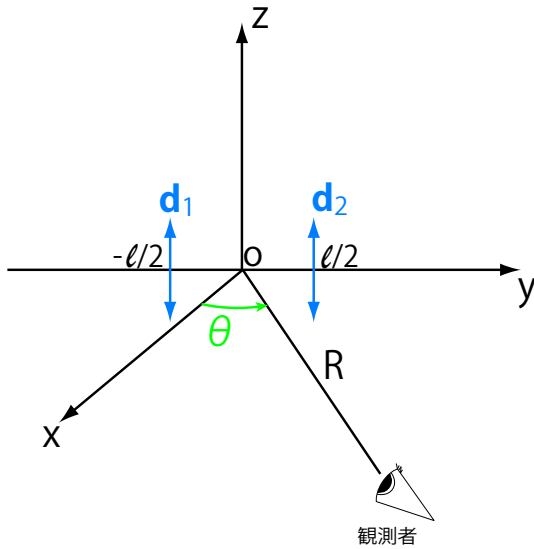


fig 1: 2本の dipole antenna と観測者の位置関係。

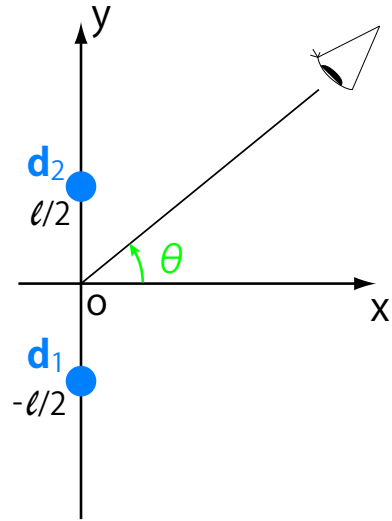


fig 2: fig1 を z 軸方向から見た図。

b) $\ell \ll \lambda$ のとき、振幅が $d_1 + d_2$ の 1 つの dipole moment からの放射と同等になることを示せ。

[4] 無数の dipole antenna からの放射と slit を通過する平面電磁波の analogy

前問を $N + 1$ 個の平行な dipole antenna が間隔 ℓ で並んだ場合に拡張する。各 dipole antenna を、振幅がそれぞれ d で等しく角振動数 ω で in phase で振動する dipole moment で置き換えよう。antenna の中心を通り antenna に垂直な面に xy 平面をとり、antenna の中心は y 軸上に並んでいるとする。 xy 平面内で x 軸とのなす角 θ の方向にいる十分遠方の観測者を考える。したがって、各 antenna からの観測者までの距離の違いは無視できる。

a) 観測者は全ての antenna からの電場を重ね合わせたものを感じる。観測される電場の振幅を求めよ。ここで、電場を複素数表示して足し算を行い、最後に実数部をとるようにすれば等比数列の和の公式が使えて計算がしやすい。計算結果は $\delta = \omega \ell \sin \theta / c$ を用いて表せ。

b) $\theta = 0$ での電場の大きさ、および $\frac{dP}{d\Omega}$ を計算せよ。

c) θ を増加させていくと δ が増加し、電場の振幅が変化する。 θ を $-\pi \sim \pi$ まで変化させたときの振幅の変化の様子を

1. $\ell < \lambda$ のとき
2. $\ell > \lambda$ のとき

の 2 つの場合にわけて図示せよ。

d) antenna の端から端までの距離を $D = N\ell (N \gg 1)$ とする。最初に振幅が 0 になる角度が十分小さいとして、その角度が

$$\theta \simeq \frac{\lambda}{D} \tag{12}$$

となることを示せ。

e) d) の結果を波の発生場所 (位置) の不確定さと波数ベクトルの不確定さの間の観測の不確定性原理を用いて導け。

f) ここまでの結果を参考にして、fig5 に示したように平面電磁波 (光) が幅 D の無限に z 方向に長い slit を通過後、slit の右側の領域をどのように伝播するか説明せよ。

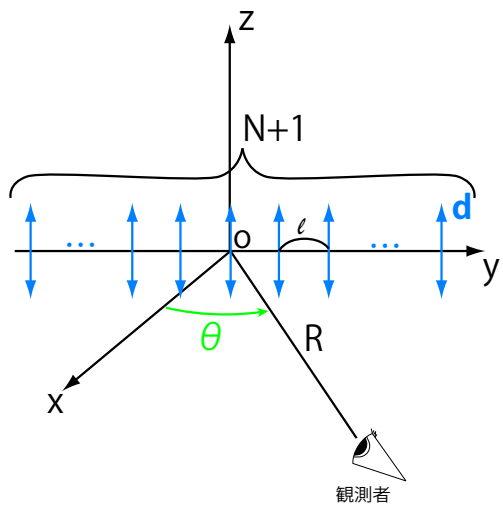


fig 3: $N+1$ 本の dipole antenna と観測者の位置関係。

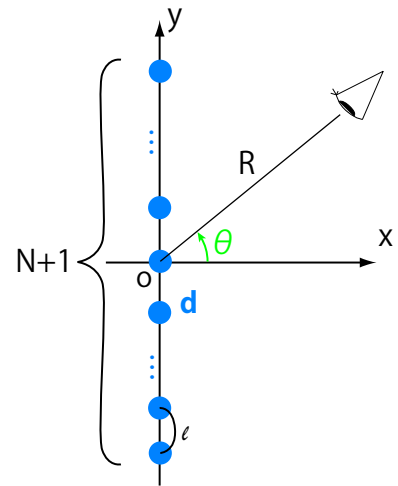


fig 4: fig3 を z 軸方向から見た図。

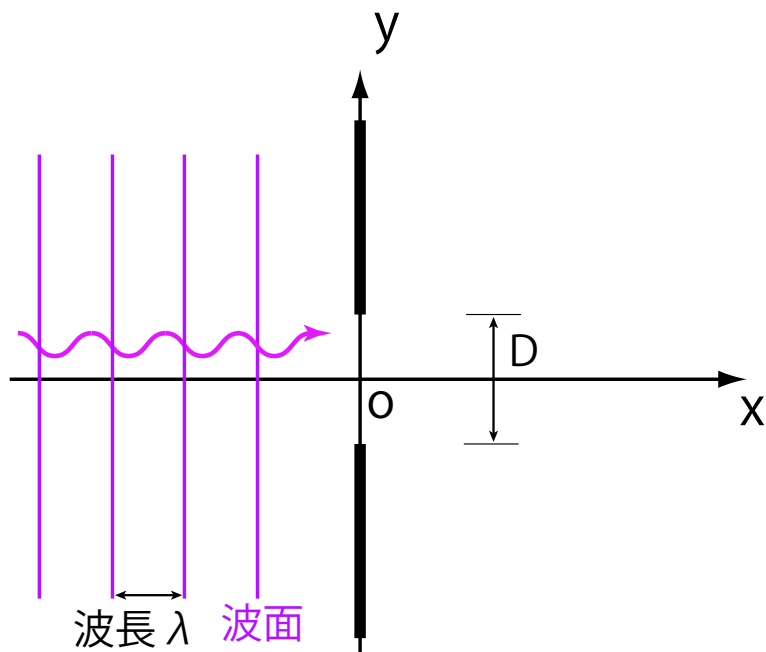


fig 5: 幅 D の slit に入射する平面電磁波。この後、電磁波は右側の領域にはどのように伝播していくだろうか。

[5] Rutherford 散乱と散乱断面積の概念

電荷 e の陽子の Coulomb 力により無限遠方から初速度 V_0 、衝突 parameter b で打ち込まれた電荷 $-e$ を持つ電子の散乱過程を考察する (fig6 参照)。陽子の質量は電子の質量 m_e の約 1840 倍もあり、電子に比べて非常に重たいので散乱の前後で陽子は静止していると考えてよい。

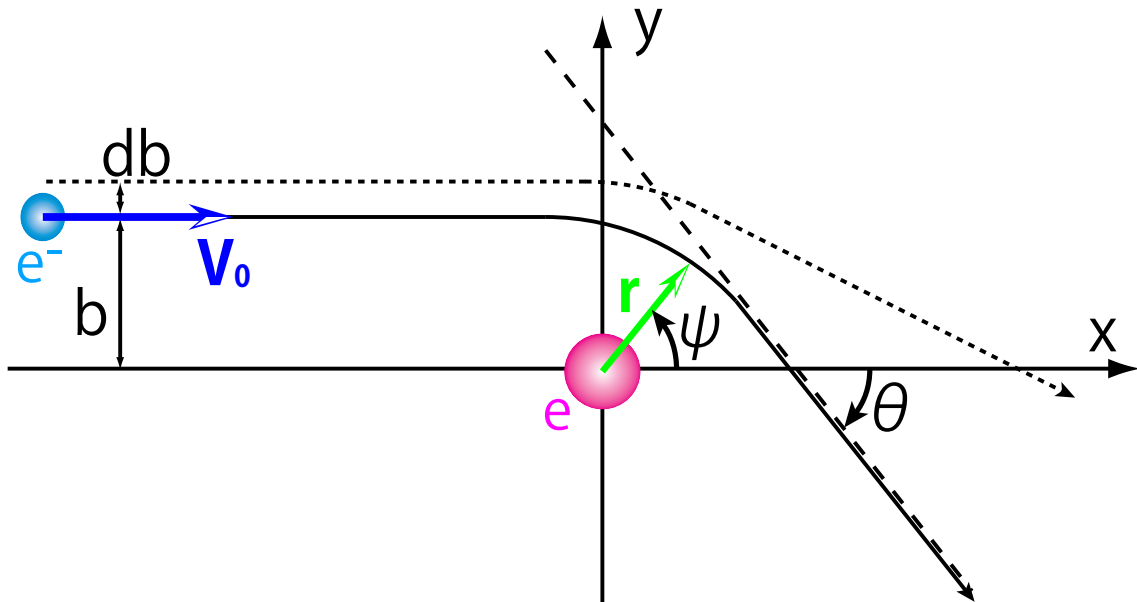


fig 6: Rutherford 散乱問題の座標設定。

5-1. 角運動量保存則を用いて

$$\dot{\psi} = -\frac{V_0 b}{r^2} \quad (13)$$

を示せ。

5-2. 電子の運動方程式をデカルト座標で書け。さらに前問の結果を用いて時間微分を ψ 微分に変換し、 x, y 成分どちらかを積分して

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{m_e V_0^2 b}{e^2} \quad (14)$$

の関係が成り立つことを示せ。

5-3. $\theta \geq \pi/2$ になるための b, V_0 の満たすべき条件を求めよ。

5-4. $b \rightarrow 0$ の極限では、 θ はどうなるか。

5-5. 無限遠方での入射電子の数密度を n とする。無限遠方での電子ビームの入射個数 flux I を n, V_0 を用いて表せ。そして、単位時間あたりに微小立体角 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ の方向に散乱される電子数を求めよ。

5-6. 微分散乱断面積 $\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega}$ を求めよ。

5-7. 電子を $\theta \geq \pi/2$ に散乱する陽子の全断面積 σ を求めよ。