08 Report 5.

[1] received power, emitted power、Lienard's formula と Larmor's formula の導出

the Lienard's formula and the Larmor's formula の導出。電荷 q の粒子の加速運動によって作られる輻射場は以下のように書けた。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\frac{q}{c}\left[\frac{\mathbf{g}}{R}\right],\ \boldsymbol{\beta}(t)\equiv\frac{\mathbf{u}(t)}{c},\ \mathbf{g}\equiv\frac{1}{\kappa^3}\mathbf{n}\times\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\},\ R(t')=|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|,\ \mathbf{n}(t')=\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|},\ \kappa(t)=1-\mathbf{n}(t)\cdot\boldsymbol{\beta}(t) \tag{1}$$

$\mathbf{r}_0(t')$ は遅延時間 t' での電荷の位置、$\mathbf{r}$ は観測者の位置ベクトルである。以下、観測者は粒子から十分遠方にいて粒子から観測者までの距離 R と $\mathbf{n}$ の粒子の運動による変化を無視できるとする。観測者が受信する粒子からの放射の、単位立体角・単位時間あたりの強度は

$$\frac{dW}{dtd\Omega}=\frac{c}{4\pi}[R^2E^2] \tag{2}$$

である。コレを received power と呼び、$\dfrac{dP_{\mathrm{r}}}{d\Omega}$ と書く。

1-1. 観測者が dt 間に受信した放射は、粒子が dt' 間に放射した電磁波です。$dt=dt'\kappa$ を示せ。

1-2. 粒子が単位時間あたりに放射した電磁波の強度を emitted power といい、$\dfrac{dP_{\mathrm{e}}}{d\Omega}$ と書く。

$$\frac{dP_{\mathrm{e}}}{d\Omega}\equiv\frac{dW}{dt'd\Omega}=\frac{c}{4\pi}[\kappa R^2E^2] \tag{3}$$

を示せ。

1-3. 以上から、total emitted power は

$$P_{\mathrm{e}}=\frac{q^2}{4\pi c}\int_{4\pi}[\kappa g^2]d\Omega \tag{4}$$

のように書ける。以下の手順に従ってこの全立体角積分を行おう。

$\mathbf{v}$ の方向を z 軸にとり $\dot{\mathbf{v}}$ を xz 平面にとって $\mathbf{v}$ とのなす角を i とする。また、$\mathbf{n}=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)$ とする。

a) 以下の式を全て示せ。

$$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}=\beta\cos\theta,\ \ \mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}=\dot{\beta}(\sin\theta\cos\phi\sin i+\cos\theta\cos i),\ \ \boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}=\beta\dot{\beta}\cos i \tag{5}$$

$$\kappa g^2=\dot{\beta}^2\left\{\frac{1}{\kappa^3}+\frac{2\beta}{\kappa^4}(\cos i\sin i\sin\theta\cos\phi+\cos^2 i\cos\theta)-\frac{\gamma^{-2}}{\kappa^5}(\sin^2 i\sin^2\theta\cos^2\phi+2\sin i\cos i\sin\theta\cos\phi+\cos^2 i\cos^2\theta)\right\} \tag{6}$$

$$I_{n+1}\equiv\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}}=\frac{(1+\beta)^n-(1-\beta)^n}{n\beta(1-\beta^2)^n} \tag{7}$$

$$J_{n+1}\equiv\int_{-1}^{1}\frac{\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}}d\mu=\frac{1}{n}\frac{dI_n}{d\beta} \tag{8}$$

$$K_{n+1}\equiv\int_{-1}^{1}\frac{\mu^2}{(1-\beta\mu)^{n+1}}d\mu=\frac{1}{n}\frac{dJ_n}{d\beta} \tag{9}$$

b) 以上の結果を用いて

$$\int_{4\pi}[\kappa g^2]d\Omega = 2\pi\left[\dot{\beta}^2\left\{I_3 + 2\beta I_4 - \gamma^{-2}K_5 - \left(2\beta J_4 + \frac{\gamma^{-2}}{2}(I_5 - 3K_5)\right)\sin^2 i\right\}\right] = \frac{8\pi}{3c^2}\left[\dot{u}^2\gamma^6(1-\beta^2\sin^2 i)\right] \tag{10}$$

を計算せよ。

c) b) の結果から以下を示せ。

$$P_{\mathrm{e}} = \frac{2q^2}{3c^3}[\gamma^6(\dot{u}^2 - |\dot{\mathbf{u}}\times\boldsymbol{\beta}|^2)] \tag{11}$$

d) c) の結果から粒子の運動が非相対論的なときの放射強度の公式

$$P_{\mathrm{e}} = \frac{2q^2}{3c^3}\dot{u}^2$$

も求めよ。

[2] 行列計算

$$\begin{pmatrix} \sin\delta_2 & \cos\delta_2 \\ -\sin\delta_1 & -\cos\delta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\delta_2 & -\sin\delta_1 \\ \cos\delta_2 & -\cos\delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\delta \\ -\cos\delta & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

を示せ。ただし、$\delta \equiv \delta_2 - \delta_1$ である。

[3] 行列の固有値・固有ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos\delta \\ -\cos\delta & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

の行列の固有値を求め、ともに 0 以上の値を取ることを示せ。

[4] 行列の対角化

[4] の行列の固有ベクトルを求め、この行列を対角化するユニタリー行列 U とその逆行列 U^{-1} を求めよ。

[5] 完全 2 次形式を満たす変数の変換

X, Y は完全 2 次形式

$$X^2 + Y^2 - 2XY\cos\delta = \sin^2\delta \tag{14}$$

を満たす。

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \tag{15}$$

なる変換により、この 2 次形式は ξ, η ではどのように書けるか。

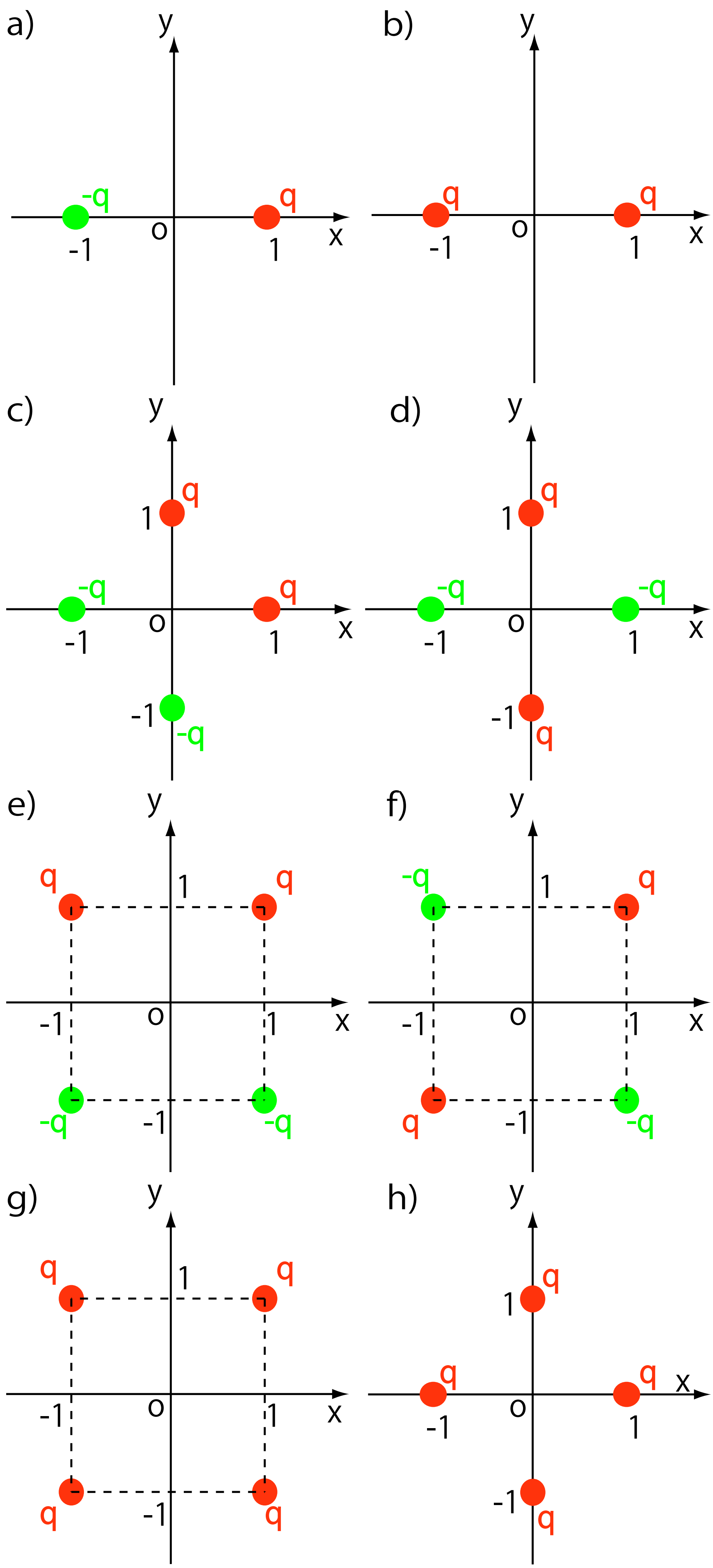
[6] dipole moment, quadro-pole moment その 1

双極子モーメントと四重極子モーメントはそれぞれ以下の式で定義される。

$$\mathbf{d} \equiv \Sigma_j q_j \mathbf{r}_j \tag{16}$$

$$Q \equiv \begin{pmatrix} \Sigma_j q_j x_j x_j & \Sigma_j q_j x_j y_j \\ \Sigma_j q_j y_j x_j & \Sigma_j q_j y_j y_j \end{pmatrix} \tag{17}$$

ここで q_j は j 番目の粒子の電荷、$\mathbf{r}_j = (x_j, y_j)$ は j 番目の粒子の位置ベクトルで、粒子は 2 次元平面内にいるとする。以下の図の場合の双極子モーメントと四重極子モーメントをそれぞれ全て求めよ。


a)
y
-q
q
-1
o
1
x
b)
y
q
q
-1
o
1
x
c)
y
q
1
-q
q
-1
o
1
x
-1
-q
d)
y
q
1
-q
-q
-1
o
1
x
-1
q
e)
y
q
1
q
-1
o
1
x
-q
-1
-q
f)
y
-q
1
q
-1
o
1
x
q
-1
-q
g)
y
q
1
q
-1
o
1
x
q
-1
q
h)
y
q
1
q
q
x
-1
o
1
-1
q