08 Report 3.

[1] Lorentz gauge の自由度

Lorentz gauge には

$$\nabla^2 \chi(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \tag{1}$$

を満たす時間によらない関数 $\chi(\mathbf{r})$ を用いて

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla \chi(\mathbf{r}) \tag{2}$$

なる Gauge 変換の自由度が残されていることを証明せよ。

[2] retarded Green function

次の方程式

$$\Box\, G(\mathbf{r}, t) = -\delta^3(\mathbf{r})\delta(t) \tag{3}$$

を満たす Green 関数の内、

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, t) &\neq 0 & \quad t \geq 0 \qquad (4) \\ &= 0 & \quad t < 0 \qquad (5) \end{aligned}$$

を満たすものを遅延 Green 関数 (retarded Green function) と呼ぶ。遅延 Green 関数を次の手順に従って求めよ。
a) Green function, δ function の Fourier 積分表示はそれぞれ

$$G(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \iiint_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k}\ \hat{G}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{6}$$

$$\delta^3(\mathbf{r})\delta(t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \iiint_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k}\ e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{7}$$

である。これらを方程式に代入して

$$\hat{G}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{c^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{\omega^2 - c^2 k^2} \tag{8}$$

を示せ。ただし $k \equiv \mathbf{k}$ である。
b) a) の結果から

$$G(\mathbf{r},t) = -\frac{c^2}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \iiint_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k}\frac{e^{-i\omega t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\omega^2 - c^2k^2} \tag{9}$$

である。ω についての積分を始めに行うことで遅延 Green 関数を求めよ。このとき、$\omega = \pm ck$ が極になるが、これらの極を避けて極の上側を通るように積分経路を選ぶことが遅延 Green 関数を選択する条件となる。遅延 Green 関数は極を避けた実軸上の積分、すなわち主値に 2 つの極を上側に避けた微小積分路の結果を加えた物になる。

c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}x\ dx = \pi \tag{10}$$

の証明の時は e^{ix}/x および e^{-ix}/x のそれぞれの積分の主値を足し合わせた物として計算され、$x = 0$ をどのように避ける積分路を取るべきかは議論する必要がなかったの。その理由を答えよ。

[3] Doppler effect

十分遠方にある物体が時刻 t' に観測者に向かって光を出し、それから dt' 後にまた光を出した。この物体が速度 $\mathbf{u}$ で動いているとする。物体から観測者の方を向く単位ベクトルを $\mathbf{n}$ とする。このとき、観測者がこれらの光を受け取る時間間隔 dt が

$$dt = \left(1 - \mathbf{n}\cdot\frac{\mathbf{u}}{c}\right) dt' \tag{11}$$

となることを示せ。ここで物体は十分遠方にあり、微小時間 dt' 間の物体の運動による $\mathbf{n}$ の変化は無視せよ。

[4] Lienard-Wiechart potentials

運動する 1 個の点電荷 q による電磁ポテンシャルが以下のようになることを示そう。

$$\phi = \frac{q}{\kappa(t_{\mathrm{ret}})R(t_{\mathrm{ret}})},\quad \mathbf{A} = \frac{q\mathbf{u}(t_{\mathrm{ret}})}{c\kappa(t_{\mathrm{ret}})R(t_{\mathrm{ret}})} = \frac{q\boldsymbol{\beta}(t_{\mathrm{ret}})}{\kappa(t_{\mathrm{ret}})R(t_{\mathrm{ret}})} \tag{12}$$

これらは the Lienard-Wiechart potentials と呼ばれている。ここで、

$$\boldsymbol{\beta}(t) \equiv \frac{\mathbf{u}(t)}{c},\quad \mathbf{R}(t) \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t),\quad R(t) \equiv |\mathbf{R}(t)|,\quad \mathbf{n}(t) \equiv \frac{\mathbf{R}(t)}{R(t)},\quad \kappa(t) \equiv 1 - \mathbf{n}(t)\cdot\boldsymbol{\beta}(t),\quad t_{\mathrm{ret}} \equiv t - \frac{R(t_{\mathrm{ret}})}{c} \tag{13}$$

などである。