08 Report 2.

[1] δ 関数を含む積分計算

次の計算を行え。ただし $g(x)$ は単調関数で、ある 1 点でのみ 0 になる関数とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-1)dx,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(3x)dx,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(-3x)dx,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x^2-1)dx,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(g(x))dx \tag{1}$$

[2] δ 関数を含む積分計算 その 2

関数 $g(x)$ が $g(x)=0$ となる点を $x=x_n$ とする。x_n が N 個あるとし、それらを $x=x_n,(n=1,2,\cdots N)$ と表す。ただし $g(x)=0$ の重解はないとする。このとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(g(x))dx \tag{2}$$

を計算せよ。

[3] 電磁場のエネルギー、energy flux、運動量、運動量 flux

真空中 $(\rho=0,\mathbf{j}=\mathbf{0})$ の Maxwell 方程式を使って以下が成り立つことを示せ。

3-1.

$$\frac{\partial U_{\text{field}}}{\partial t} = -\nabla\cdot\mathbf{S} \tag{3}$$

ただし

$$U_{\text{field}} \equiv \frac{1}{8\pi}(E^2+B^2),\ \ \mathbf{S}\equiv\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \tag{4}$$

3-2.

$$\frac{\partial g_j}{\partial t} = -\nabla\cdot\mathbf{M}_j \tag{5}$$

ただし、$j=x,y,z$ で

$$\mathbf{M}_j \equiv (M_{jx},M_{jy},M_{jz}),\ \ M_{ji}\equiv -\frac{1}{4\pi}\left(E_jE_i-\frac{1}{2}E^2\delta_{ji}+B_jB_i-\frac{1}{2}B^2\delta_{ij}\right),\ \ \mathbf{g}\equiv\frac{1}{4\pi c}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \tag{6}$$

である。δ_{ji} はクロネッカーのデルタである。

[4] 電磁場の波動方程式

Maxwell 方程式から、電場・磁場が

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{0} \tag{7}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{0} \tag{8}$$

を満たすことを示せ。ただし、今考えているのは真空 $(\rho = 0, \mathbf{j} = \mathbf{0})$ とせよ。

[5] 変位電流項がない場合

Maxwell 方程式から Maxwell の変位電流項 $\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ を落とし、[4] と同様の変形をして真空中 $(\rho = 0, \mathbf{j} = \mathbf{0})$ での Maxwell 方程式から得られる電場・磁場が満たす方程式を導け。

[6] ダランベール方程式の球面波解とその性質

ダランベール方程式

$$\nabla^2 f(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0 \tag{9}$$

の球面波解について考察する。球面極座標の動径座標を R とする。関数 f は動径座標と時刻のみの関数、すなわち $f(R,t)$ とする。

6-1. ダランベール方程式が

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial}{\partial R}\right)f(R,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(R,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{10}$$

と書けることを示せ。

6-2. 6-1 で得られた方程式に $f(R,t) = \dfrac{U(R,t)}{R}$ を代入し、$U(R,t)$ の満たす方程式が

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U(R,t) = 0 \tag{11}$$

となることを示せ。

6-3. 6-2 の方程式を

$$\xi = R - ct \tag{12}$$

$$\eta = R + ct \tag{13}$$

を用いて変形せよ。

6-4. 6-3 の結果より

$$f(R,t) = \frac{g(\xi)}{R} \tag{14}$$
$$f(R,t) = \frac{h(\eta)}{R} \tag{15}$$

の 2 つがダランベール方程式の解であることを示せ。ここで $g(\xi), h(\eta)$ はそれぞれ ξ, η のみに依存する任意の関数である。
6-5. 6-4 で得られた解の物理的性質を考察せよ。
6-6. [5] で得られた方程式に [6] と同様の手続きを行って得られる解を求めよ。ここで得られた解と 6-5 までで得られた解の違いについて考察せよ。

[7] D'Alamberatian と Green 関数

関数 ϕ が $\Box\phi = -4\pi\rho_e(\mathbf{r},t)$ を満たすとする。ここで $\Box$ は D'Alambertian である。$\Box\, G(\mathbf{r},t) = -\delta^3(\mathbf{r})\delta(t)$ を満たす関数 G を用いて

$$\phi(\mathbf{r},t) = 4\pi \iiiint G(\mathbf{r}-\mathbf{r}'.t-t')\rho_e(\mathbf{r}',t')d^3\mathbf{r}'dt'$$

のように表されることを示せ。上記の方程式で定義される関数 G を Green 関数と呼ぶ。