08 Report 13.

[1] Sunyaev-Zel'dovich(SZ) effect

宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) は温度 $T \sim 2.73\mathrm{K}$ の黒体放射であり、その放射強度スペクトル (単位時間・単位面積・単位立体角・単位周波数あたりの放射のエネルギー) は

$$I_\nu = \frac{2h}{c^2}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \tag{1}$$

という黒体放射のスペクトルで与えられる。宇宙には一様等方に CMB photon が満ちている。

1-1. 最大強度になる周波数と温度の間に

$$h\nu \simeq 2.82 k_B T \tag{2}$$

の関係があることを示せ。これを Wien の変移則と呼ぶ。これを用いて CMB の強度が最大となる周波数を求めよ。

1-2. Rayleigh-Jeans limit($h\nu \ll k_B T$) で

$$I_\nu = \frac{2k_B T \nu^2}{c^2} \tag{3}$$

となることを示せ。

1-3. 以下、Rayleigh-Jeans limit で考える。CMB が温度 $k_B T_e = 10\mathrm{keV}$、電子数密度 $n_e = 10^{-3}\mathrm{cm}^{-3}$、半径 $L = 1\mathrm{Mpc}$ のプラズマガス球 (銀河団プラズマ領域) を通過したとする。CMB photon が電子により Inverse Compton scattering を受けることにより、その強度が

$$\Delta I_\nu = -2y\frac{2k_B T \nu^2}{c^2} \tag{4}$$

となることを示せ。ここで y は text(5.54) 式で定義される Compton-y-parameter である。またこの天体の中心部での y の値を求めよ。

ヒント:周波数が $\nu \sim \nu + \Delta\nu$ の photon のうち、散乱された photon は周波数が高くなり、$\nu \sim \nu + \Delta\nu$ の photon でなくなる。一方、$\nu' \sim \nu' + \Delta\nu' < \nu$ の低い周波数の photon は周波数が高くなり、新たに $\nu \sim \nu + \Delta\nu$ の光子の仲間入りを果たす。ただし、$h\nu - h\nu' = \Delta\epsilon$ は text(5.53) 式で与えられる。あとは周波数 ν の photon のうち何割が散乱されるかが τ_{es} で決まることを用いる。

[2] Cherenkov radiation

屈折率 $n_r > 1$ の一様媒質中を等速直線運動する電荷 q の荷電粒子が作る速度場について考えよう。

2-1. 真空中を伝播する電磁波の 4 元 potential が満たす方程式は

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho_e \tag{5}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_e \tag{6}$$

であった。ただし、4元 potential は Lorentz condition

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

を満たすように gauge 選択をした。屈折率 n_r の一様媒質中を伝播する電磁波の満たす方程式と Lorentz condition に対応する条件を真空中での結果から類推して答えよ。

2-2. 2-1 の答えから、屈折率 n_r の一様媒質中を等速直線運動する電荷 q の荷電粒子が作る速度場が

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = q\left[\frac{(\mathbf{n} - n_r\boldsymbol{\beta})(1 - n_r^2\beta^2)}{\kappa^3 R^2}\right] \tag{8}$$

$$\kappa = 1 - n_r \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta} \tag{9}$$

となることを説明せよ (こちらも類推でよい、厳密に方程式を解き直す必要は無い)。

2-3. $n_r > 1$ のとき、$\kappa = 0$ となる $\mathbf{n}$ と $\boldsymbol{\beta}$ のなす角 θ を求めよ。これを臨界角と呼ぶ。

2-4. 臨界角上では $\mathbf{n}\cdot\mathbf{E} = 0$ であることを示せ。

2-5. 屈折率の 1 からのズレを Δn_r と書く、すなわち $n_r = 1 + \Delta n_r$ とする。$\Delta n_r \ll 1$ のとき、$\kappa = 0$ の満たす θ が存在するために粒子の Lorentz factorγ が満たすべき条件を求めよ。さらに空気中では具体的に Lorentz factor がいくら以上でなければならないか計算せよ。空地中の屈折率は $n_r \sim 1.0003$ である。

2-6. 2-5 の条件が満たされているとき、臨界角 θ を $\Delta n_r, \gamma$ を用いて表せ。ただし $\theta \ll 1, \gamma \gg 1, \Delta n_r \ll 1$ とせよ。

2-7. $\gamma^2 \gg \Delta n_r$ の極限で空気中での臨界角がいくらになるかを計算せよ。

[3] Synchrotron energy minimum と電波天文学でよく使われる Jy 単位

磁場の方向がランダムに向いて分布している天体からのシンクロトロン放射を考える。このとき視線方向と磁場の方向の関係は、4πstrad 全ての可能性が現れる。したがってこの天体からのシンクロトロン放射強度は、天体を観測する方向によらず等方的であり、text 5.2.3.4 節で得た視線方向に対して平均化された放射強度が実際に観測される放射強度となる。ここでの計算は電子は磁場に対して垂直な平面内を円運動している場合について行ったものであり、

$$P_e(\omega, \mathbf{n}) = \frac{\sqrt{3}e^3 N_0 \gamma_0^{p-1} B}{8\pi^2 m_e c^2 (p+1)} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{p}{4} - \frac{1}{12}\right)\left(\frac{m_e c\omega}{3eB}\right)^{-\frac{p-1}{2}} \tag{10}$$

を得た。ここで電子は text(5.28) 式で与えられるベキ乗型 (power law) のエネルギー分布をしているとした。電子の運動が等方的とすると、磁場にたいして様々な pitch 角 α の電子からの放射の平均を観測していることになる。pitch 角 α の電子からの放射は (10) 式を $B \to B\sin\alpha$ のように置き換えることで得られる。このようにして得られた式に $\frac{1}{4\pi}\sin\alpha d\alpha \times 2\pi = \frac{1}{2}\sin\alpha d\alpha$ を書けて積分することにより平均化され、等方分布をした電子からの放射強度が得られる (被積分関数が方位角 ϕ には依存しないことから、方位角積分は 2π に置き換えた)。sin 関数の積分公式

$$\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin\alpha \sin^{\frac{p+1}{2}}\alpha \, d\alpha \simeq \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{p+5}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+7}{2}\right)} \tag{11}$$

を用いることにより、電子の pitch 角に対して平均化された単位周波数あたりの放射強度が

$$\epsilon_\nu = \frac{\sqrt{3}e^3 N_0 \gamma^{p-1}}{4\pi m_e c^2} a(p)\left(\frac{3e}{2\pi m_e c}\right)^{\frac{p-1}{2}} B^{\frac{p+1}{2}} \nu^{-\frac{p-1}{2}} \tag{12}$$

$$a(p) \equiv \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{p}{4}+\frac{19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{p}{4}-\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{p+6}{4}\right)}{2(p+1)\Gamma\left(\frac{p+8}{4}\right)} \tag{13}$$

のように求まる。ここで変数を角周波数から周波数へと変換するのに $\epsilon_\omega d\omega = \epsilon_\nu d\nu$ を用いた。text(5.28) 式が単位体積あたりの電子数を与えるとすれば、(12) 式は単位体積あたりのシンクロトロン放射強度を与える。天体の体積を V、天体の平均の磁場強度と相対論的電子数密度が天体内で一様とすると、この天体からの周波数 ν における全放射強度は

$$L_\nu = \epsilon_\nu V \tag{14}$$

で与えられる。シンクロトロン放射強度は磁場強度と相対論的電子の個数密度の積に比例しており、強度の測定のみからは天体の磁場強度と相対論的電子の個数密度がそれぞれどのような割合になっているかは知ることができない (磁場強度と相対論的電子数密度が縮退している)。そこで energy minimum の議論を用いてシンクロトロン放射強度の測定結果のみから、これらの 2 つの情報を引き出す方法を以下の手順にしたがって求めよう。
天体内の相対論的電子の全エネルギーは

$$W_e = \frac{N_0 V \gamma_0 m_e c^2}{p-2}\left[\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\right)^{-p+2} - \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_0}\right)^{-p+2}\right] = G(p,\nu) L_\nu B^{-\frac{p+1}{2}} \tag{15}$$

$$G(p,\nu) \equiv \frac{4\pi(m_e c^2)^2}{\sqrt{3}e^3}\frac{1}{a(p)(p-2)}\left(\frac{3e}{2\pi m_e c}\right)^{-\frac{p-1}{2}}(\gamma_1^{-p+2} - \gamma_2^{-p+2})\nu^{\frac{p-1}{2}} \tag{16}$$

3-1. 観測から決定されるシンクロトロン全放射強度 L_ν を一定に保ち、相対論的電子と磁場の全エネルギー

$$W_{\rm tot} = G(p,\nu) L_\nu B^{-\frac{p+1}{2}} + \frac{B^2}{8\pi}V \tag{17}$$

を最小にする磁場強度が

$$B_{\rm min} = \left(\frac{2\pi(p+1)G(p,\nu)L_\nu}{V}\right)^{\frac{2}{p+5}} \tag{18}$$

となることを示せ。
3-2. $B = B_{\rm min}$ のとき

$$W_e = \frac{4}{p+1}W_B, \quad W_B \equiv \frac{B_{\rm min}^2}{8\pi}V \tag{19}$$

が成り立つことを導け。
3-3. 天体の磁場が $B = B_{\rm min} = 1\mu$G、天体が半径 1Mpc の球体で観測者から距離 $r = 100$Mpc に存在するとする。4-1 の結果を用いて $\nu = 1$GHz で観測したときの flux density

$$F_\nu = \frac{L_\nu}{4\pi r^2} \tag{20}$$

を Jy(ジャンスキー) 単位で求めよ。ここで、1Jy $= 10^{-23}$erg cm$^{-2}s^{-1}$Hz^{-1} である。計算には $\gamma_1 = 100, \gamma_2 = 10^5, p = 3, \Gamma(7/3) \sim 1.19064, \Gamma(2/3) \sim 1.35412, \Gamma(9/4) \sim 1.133, \Gamma(11/4) \sim 1.60836$ を用いよ。計算テクニックとして、$\omega_{\rm ce} = \dfrac{eB}{m_e c}$ の組み合わせを作り磁場と素電荷をサイクロトロン周波数に直して計算を行えば簡単で間違いが少なくなる。