08 Report 11.

[1] 一様磁場中における相対論的陽子の運動エネルギーと Larmor radius

一様磁場中を運動している相対論的陽子を考えよう。磁場の強度を 1μG のとき、Larmor radius が 1pc および 10kpc になる陽子の運動エネルギーを求めよ。ここで、陽子の運動エネルギーは $\gamma m_p c^2$(γは Lorentz factor, m_pは陽子の質量) とする。

[2] CMB photon と相対論的陽子の衝突

宇宙は温度 $3K$ の黒体放射、いわゆる宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) で満たされている。CMB 光子数密度は $411\mathrm{cm}^{-3}$ である。

2-1. $k_B T = h\nu$ により、光子 1 個のエネルギーに換算したとき $h\nu$ はいくらになるか、eV 単位で答えよ。

2-2. 運動エネルギー $E = \gamma m_p c^2$ の相対論的陽子 ($\gamma \gg 1$) と CMB 光子とが正面衝突したとする。このとき陽子の乗った系から見て、衝突する CMB 光子のエネルギーが π 中間子の静止質量エネルギー $m_\pi c^2 \sim 150$MeV を越えて見えるためには E は何 eV 以上であればよいか。

2-3. 2-2 で求めたエネルギーを越える陽子は CMB 光子と衝突してエネルギーを失ってしまう。この衝突の断面積は $0.25\mathrm{mb} = 0.25 \times 10^{-27}\mathrm{cm}^2$ である (mb はミリバーンと読み、$1\mathrm{b} = 10^{-26}\mathrm{cm}^2$)。この陽子の mean-free-pass を求めよ。

[3] 輻射場の Fourier スペクトル

text 2.16 節の最終式をこの節の指示に従って導け。

[4] Bessel function J_n の諸公式

$$J_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - z\sin\varphi)d\varphi \tag{1}$$

4-1. 以下の漸化式を示せ。

$$\frac{2n}{z}J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) \tag{2}$$

$$2\frac{d}{dz}J_n(z) = J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) \tag{3}$$

4-2. 次の方程式も示せ。

$$\frac{d^2}{dz^2}J_n(z) + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}J_n(z) + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right)J_n(z) = 0 \tag{4}$$

4-3. (1) 式で定義される Bessel function が以下のように変形できることを示せ。

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iz\sin\varphi - in\varphi}d\varphi = \frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iz\cos\varphi + in\varphi}d\varphi \tag{5}$$

4-4. 次の式を示せ。

$$e^{iz\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\varphi} \tag{6}$$

[5] Modified Bessel function K_ν と Airy function Φ の関係式

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh t}\cosh(\nu t)dt \tag{7}$$

を Modified Bessel function(or Macdonald function) と呼ぶ。ただし $z > 0$。
5-1. 以下の関係式を示せ。ただし $K'_\nu = \dfrac{dK}{dz}$ である。

$$\frac{2\nu}{z}K_\nu(z) = -K_{\nu-1} + K_{\nu+1} \tag{8}$$

$$2K'_\nu = -K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) \tag{9}$$

$$K_{-\nu}(z) = K_\nu(z) \tag{10}$$

5-2. 5-1 を用いて以下の式も示せ。

$$\frac{d^2K_\nu}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dK_\nu}{dz} - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right)K_\nu = 0 \tag{11}$$

5-3.

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \cos\left(\frac{\xi^3}{3} + \xi z\right)d\xi \tag{12}$$

で定義される関数を Airy function と呼ぶ。この関数が方程式

$$\Phi''(z) = z\Phi(z) \tag{13}$$

を満たすことを示せ、ただし $\sin\infty = 0$ とせよ。
5-4. Airy function と Modified Bessel function の関係式

$$\Phi(z) = \sqrt{\frac{z}{3\pi}}K_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \tag{14}$$

を証明せよ。証明方法として、右辺が (1). 5-3 で与えた方程式の解であること (2). 2 つの境界 $z = 0, z = \infty$ での両辺の値が同じであること、の 2 点を示せばよい (2 階の微分方程式の解の一意性から 2 つの境界条件を与えれば、解が一意に求まる)。
5-5. 次を示せ。

$$\Phi'(z) = -\frac{z}{\sqrt{3}\pi} K_{2/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \tag{15}$$

5-6. $n \gg 1$ のとき

$$J_n(n\epsilon) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\{n(\xi - \epsilon\sin\xi)\}d\xi \tag{16}$$

が以下の式で近似できることを示せ。

$$J_n(n\epsilon) \simeq \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\left\{n\left(\frac{1-\epsilon^2}{2}\xi + \frac{\xi^3}{6}\right)\right\} d\xi \ \ (\text{for } \epsilon \sim 1) \\ \\ 0 \ \ (\text{for } \epsilon \ll 1) \end{cases}$$

この積分には小さい角度 ξ のみが影響を与え、積分範囲の上限値にはほとんど依存しないので上限を ∞ とした。小さい角度 ξ では $1 - \epsilon^2 \sim \xi^2$ なので 3 次までを残した形で書く。

[6] Synchrotron radiation のスペクトルと偏光度の厳密な導出

z 軸方向を向いた一様磁場 B 中を運動する相対論的電子からの放射の周波数分布の厳密な形を導こう。簡単のため電子は xy 平面内で円運動をしているとする。$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ は電子の Lorentz factor である。観測者の視線方向と z 軸とのなす角を θ とする。一般性を失うことなく観測者視線方向を yz 平面内に設定することができ、視線方向単位ベクトルを $\mathbf{n} = (0, \sin\theta, \cos\theta)$ のように書く。以下の計算では長時間平均を行うので、部分積分をして出てきた項 (例えば text2.16 節の最後の式の第 1 項) の寄与は無視できる。

6-1. text2.16 節の最後の式から角周波数 ω の輻射場の電場の各成分が text(5.29) 式で与えられることを示せ。

6-2. 視線方向と磁場が作る面内およびその面に垂直な方向に偏光した成分の単位時間・単位角周波数・単位立体角あたりの放射強度は

$$\frac{dW_\perp}{d\omega d\Omega dt'} = \frac{c|\hat{E}_x|^2 R^2}{T'} \tag{17}$$

$$\frac{dW_\parallel}{d\omega d\Omega dt'} = \frac{c(|\hat{E}_y|^2 + |\hat{E}_z|^2) R^2}{T'} \tag{18}$$

で与えられる。これらを角周波数 ω で積分することにより

$$\frac{dW_\perp}{d\Omega dt'} = \frac{e^2\beta^2}{2\pi c}\sum_n \omega_n^2 J_n'(\lambda_n)^2 \tag{19}$$

$$\frac{dW_\parallel}{d\Omega dt'} = \frac{e^2}{2\pi c}\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\sum_n \omega_n^2 J_n(\lambda_n)^2 \tag{20}$$

を示せ。ここでは $\omega > 0$ のみ取るとし、sinc 関数の性質から異なる次数 n が掛け合わさった項は 0 とした。また $\omega_n = n\omega_{\mathrm{se}}, \lambda_n = n\beta\sin\theta$ である。

6-3. 6-2 の結果を立体角・角周波数で積分し、全放射強度が text(5.31) 式で与えられることを示せ。

6-4. text の指示に従って単位角周波数あたりの放射強度式 (5.38) 式を (5.31) 式から導け。

6-5 text(5.38) 式に現れた関数 F の 2 つの場合の漸近的振る舞い

$$F(\chi_0) \propto \begin{cases} \chi_0^{1/3} & \text{for } \chi_0 \ll 1 \\ e^{-\chi_0}\chi_0^{1/2} & \text{for } \chi_0 \gg 1 \end{cases} \tag{21}$$

を示せ。

6-6. $F(\chi_0)$ を χ_0 の関数として図示し、$\chi_0 \sim 0.29$ あたりで最大値を持つことを確かめよ (GSL は用いない方が好ましい、ある程度式変形して C や Fortran で実際に計算してみるとよいだろう)。

6-7. 電子のエネルギー分布が text(5.28) 式で与えられるとき、Synchrotron 放射の放射強度の角周波数分布が text(5.39) で与えられることを示せ。

6-8. text5.2.3.5 節に従って、Synchrotron 放射の偏光度が text(5.41) 式で与えられることを示せ。ただしここでも電子のエネルギー分布は text(5.28) 式で与えられるとする。

必要なら茅根さんの解答および中村の解答を参考にせよ。