08 Report 10.

[1] 制動放射 (bremsstrahlung)、銀河団プラズマからの熱制動放射

1-1. text(5.7) 式の計算を実行し、(5.8) 式を導出せよ。
1-2. (5.8) 式の結果を用いて、(5.9), (5.10) 式を導出せよ。
1-3. 多数の電子とイオンからなる天体からの制動放射の偏光状態はどのようなものとして観測されるかを答えよ。ただし、電子とイオンは天体中で位置・速度ともにランダムに分布しているものとする。

1-4. 温度 $k_BT = 10\mathrm{keV}$,　電子個数密度 $n_e = 10^{-3}\mathrm{cm}^{-3}$ の電離プラズマが半径 $1\mathrm{Mpc} = 3.086 \times 10^{24}\mathrm{cm}$ の球内に一様に分布している天体を考える。この天体から熱制動放射で放出される 1keV 以上のエネルギーを持った光子を観測しよう。
a) 天体内の任意の場所から放出された光子が、天体の外に出るまでに電子により散乱される回数が十分 1 より小さいこと (optically thin) を示せ。
b) 面積 $1\mathrm{cm}^2$ の検出器に、単位時間当たりにこの天体から到来する 1keV 以上のエネルギーを持った光子数を求めよ。ただし、電子の速度分布で平均した gaunt factor は 1、$\int_{0.1}^{\infty} x^{-1}e^{-x}\,dx = 1.82$、天体までの距離は 100Mpc とせよ。

[2] Electro-Magnetic tensor

4 元 potential を $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ で定義する。

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{1}$$

で定義される 2 階のテンソル成分を全て求めよ。ただし、メトリックは

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

のように取る (素粒子専門の教科書や講義とは逆なので注意せよ)。

[3] 相対論的な運動方程式、荷電粒子の一様磁場中での相対論的運動

電磁場中を相対論的な運動をする粒子にはたらく Lorentz 力を求める。Lorentz 力の満たすべき要請は
(1) 相対論的に共変であること
(2) 非相対論的極限でこれまでの Lorentz 力を再現すること
である。以上の要請を満たす形として

$$F^\mu = \frac{e}{c} F^\mu{}_\nu U^\nu \tag{3}$$

がある。ここで粒子の電荷は e、$U^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$ は粒子の 4 元速度である。
3-1. Lorentz 力の時間・空間成分を求めよ。

3-2. 要請 (2) を満たすことを実際に確かめよ。
3-3. 一様磁場中を相対論的に運動する電子の運動方程式を立て、その時間・空間成分がそれぞれ

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_e c^2) = -e\mathbf{v}\cdot\mathbf{E} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_e \mathbf{v}) = -\frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} \tag{5}$$

となることを示せ。ここで $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ は Lorentz factor である。
3-4. 一様磁場中の相対論的電子は角振動数

$$\omega_{\rm se} = \frac{eB}{\gamma m_e c} = \frac{\omega_{\rm ce}}{\gamma} \tag{6}$$

の円運動をすることを示せ。ここでは簡単のため電子の磁場に沿った方向の速度成分は 0 とした。
3-5. その円運動の半径も求めよ。
3-6. Lienard の公式を用いて、pitch 角が α の電子からの全放射強度、text(5.24) 式を導出せよ。ここで pitch 角とは、電子の速度ベクトルが磁場となす角のことである。
3-7. 電子の速度分布が等方的であるとして、電子の速度方向について平均化された全放射強度が text(5.25) 式で与えられることを示せ

[4] relativistic beaming effect による観測される放射スペクトルの変化

相対論的ビーミング効果により、磁場の周りを回転する電子は進行方向を中心とした図に示したようなコーン内 (以下、放射コーンと呼ぶ) にほとんどの放射が集中する。したがって、観測者は視線方向が放射コーン内に入っているときのみ電子からの強い放射を観測すると考えてよい。観測者は灯台からの光のように、規則的に強いパルス電磁波を観測することになる。
4-1. 観測者の視線が電子の放射コーンに入った時刻 t_1 と出る時刻 t_2 の間隔 Δt が

$$\Delta t = \frac{2}{\gamma\omega_{\rm se}} = \frac{2}{\omega_{\rm ce}} \tag{7}$$

で与えられることを示せ。
4-2. 4-1 の時間間隔は、観測者にとっては

$$\Delta t^0 \simeq \Delta t\left(1-\frac{v}{c}\right) \simeq (\gamma^2\omega_{\rm ce})^{-1} \tag{8}$$

となることを示せ。ただし、v は電子の速さ、$\gamma \gg 1$ のため放射コーンが観測者の視線方向に入っている間は電子の速度ベクトルと視線方向はほぼ平行である、とせよ。
4-3. 観測の不確定性原理より、観測されるスペクトルが $0 < \nu < \gamma^2\omega_{\rm ce}$ の範囲に広がることを計算せよ。
4-4. 磁場が 1μG のとき、100TeV および 10GeV の運動エネルギーを持つ電子からの放射の最大周波数 ($\nu = \omega/2\pi$) はいくらか?Hz および $h\nu$ にして eV 単位で答えよ。