

# 08 Report 1.

## [ 1 ] sinc 関数と Fourier 変換の積分計算

1-1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \quad (1)$$

を複素数平面上での経路積分を用いて証明せよ。

1-2.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(t)E(t)e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(\omega')\hat{W}(\omega - \omega')d\omega' \quad (2)$$

を証明せよ。

## [ 2 ] 観測の不確定性 (可干渉時間)

$-\Delta t/2 \leq t \leq \Delta t/2$  の間で

$$E(t) = \cos \omega_0 t \quad (3)$$

を観測し、それ以外では  $E(t) = 0$  の波が存在したとする。以下では  $2\pi/\Delta t \ll \omega_0$  とし、正の角周波数のスペクトルのみ考えよ。

2-1. Fourier 変換を行い、周波数分布を求めよ。

2-2. 周波数分布は、中心周波数  $\omega$  の回りで  $\Delta\omega \simeq 2\pi/\Delta t$  程度の広がりを持つ。この物理的理由を波の干渉を用いて定性的に説明せよ。ここで  $\Delta t \simeq 2\pi/\Delta\omega$  を coherent time(可干渉時間) という。

## [ 3 ] Box-Muller 法と Gaussian の性質

3-1. 変数変換

$$y_1 = \sqrt{-2 \ln x_1} \cos(2\pi x_2) \quad (4)$$

$$y_2 = \sqrt{-2 \ln x_1} \sin(2\pi x_2) \quad (5)$$

を用いて  $\int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2$  を計算し

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = 1 \quad (6)$$

を証明せよ。この変数変換を用いて  $(0, 1)$  の一様乱数から Gauss 分布に確率分布が従う確率変数を発生させる方法を Box-Muller(ボックス-ミュラー、ボックス-マラー) 法という。

### 3-2. Gaussian window

$$W(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad (7)$$

を Fourier 変換し、結果を図示せよ。この結果から  $\Delta\omega\Delta t$  を評価せよ。

## [ 4 ] Fourier 変換に関する諸定理

### 4-1. たたみ込み定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t')K(t-t')dt' = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\hat{K}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \quad (8)$$

を証明せよ。

### 4-2. Wiener-Khintchine formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f(t+\tau)d\tau = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 e^{-i\omega t}d\omega \quad (9)$$

を証明せよ。

### 4-3. Parseval formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)^2 d\tau = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (10)$$

も証明せよ。

## [ 5 ] RC 回路、計算と物理的解釈

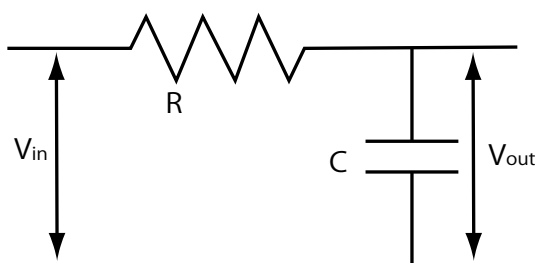


fig 1: low pass filter circuit

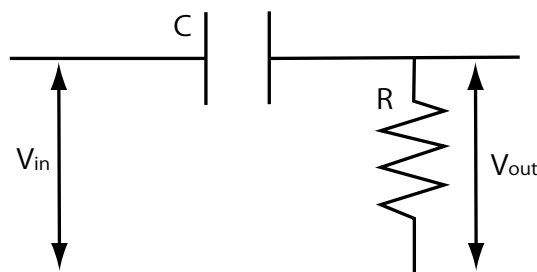


fig 2: high pass filter circuit

RC 回路の問題 (R は抵抗、C はコンデンサ)。

5-1. RC 回路のコンデンサの両端に  $v(t) = v_0\delta(t)$  というパルス電圧をかけた。コンデンサの両端の電圧の時間発展を表す微分方程式を立て、それを定数変化法を用いて解いて時間変化を求めよ。

5-2. この結果を Fourier 変換し、電圧の大きさと位相の周波数分布を求めよ。

5-3. この結果から RC 回路が low pass filter としての働きを持つことがわかる。その理由を (数式や回路の性質とかではなく) 物理的に (直観的に) 説明せよ。また、カットされる周波数の下限値の典型的な値を求めよ。

5-4. R と C の位置を入れ替えた CR 回路は high pass filter としてはたらく。それはなぜか、こちらも (具体的な計算もいはいけど) 物理的に説明せよ。

## [ 6 ] 電荷保存の式 (連続の式)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (11)$$

が電荷保存を表すことを積分形の電荷保存則を用いて示せ。

## [ 7 ] ベクトル解析

$\operatorname{div} \operatorname{rot} = \mathbf{0}$ ,  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} = \mathbf{0}$  が恒等的に成り立つことを示せ (具体的に成分計算をしてもよし、完全反対称テンソルをもちいてもよし)。

## [ 8 ] ベクトル解析

以下のベクトル解析の公式を証明せよ。

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (12)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (13)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (14)$$

## [ 9 ] ベクトル解析

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (15)$$

を、左辺から右辺を導く方法で示せ。

## [ 10 ] ベクトル解析

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = 0 \quad (16)$$

を証明せよ。