

## [ 1 ] パルサー観測と dispersion measure

fig1 はパルサーの電波観測の結果である (茅根さんのページより抜粋)。横軸は観測時間  $t$  で左から右に時間は流れる。縦軸は周波数で 48 チャンネルある。白い所は各チャンネルがシグナルを受けた所である。ほとんどがノイズであるが、一部斜めに連続的に白い点が連なったところがある。ココがパルサーからのシグナルが各チャンネルに到着した所である。横軸は時間軸である。

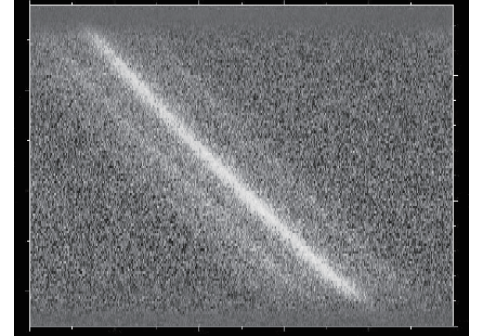


fig 1: パルサーの電波観測結果。

1-1.

まず、この fig1 が周波数の高い順に上から並んでいるのか下から並んでいるのかを考える。プラズマ中を伝搬する電磁波の分散関係式より

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_{pe}^2 \implies k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_{pe}^2}{c^2}} \quad (\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}}) \quad (1)$$

観測量は電磁波のエネルギーである。よってエネルギーの伝達速度である群速度を調べれば答えが出そうだ。(1) 式の両辺を  $k$  で微分すると

$$1 = \frac{1}{c} \frac{2\omega}{2\sqrt{\omega^2 - \omega_{pe}^2}} \frac{d\omega}{dk} \iff v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}} \quad (2)$$

よって  $\omega$  が大きいほど群速度が大きくなり、それだけ早く到達する。よって上から周波数の高い順に並んでいることがわかる。

1-2.

400MHz と 300MHz でパルスの到着時間に 1.13sec の差があった。この結果から dispersion measure を求めてみよう。そのためにまずパルスが観測者に到達するまでにかかる時間  $t_p$  を考える。パルサーから観測者までの距離を  $d$  とし、さらに  $\omega_{pe}^2/\omega^2 \ll 1$  とすると

$$\begin{aligned} t_p &= \int_0^d \frac{ds}{v_g} = \int_0^d \frac{ds}{c \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}}} \simeq \frac{1}{c} \int_0^d \left( 1 - \frac{1}{2} (-1) \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right) ds = \frac{1}{c} \int_0^d \left( 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2} \right) ds \quad \underbrace{\quad}_{\omega_{pe} \text{ の定義より}} \\ &= \frac{d}{c} + \frac{1}{2c\omega^2} \frac{4\pi e^2}{m_e} \int_0^d n_e ds \\ &= \frac{d}{c} + \frac{2\pi e^2}{m_e c \omega^2} \int_0^d n_e ds \end{aligned} \quad (3)$$

電子数密度  $n_e$  のプラズマが存在することによる電磁波の到達時間の遅れを  $\Delta t_p$  とすると

$$\begin{aligned} \Delta t_p &= \frac{2\pi e^2}{m_e c \omega^2} \underbrace{\int_0^d n_e ds}_{DM} = \frac{e^2}{2\pi m_e c} \left( \frac{2\pi}{\omega} \right)^2 DM = \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\overbrace{\hbar c}^{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}}{m_e c^2} \frac{c}{\nu^2} DM \simeq \frac{1}{6} \frac{200 \times 10^{-13} \text{ cm}}{140 \cdot 0.5} \frac{3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}}{\nu^2} DM \\ &= \frac{10^{-1} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}}{70} \frac{DM}{\nu^2} \simeq 1.4 \times 10^{-3} \frac{DM}{\nu^2} \end{aligned} \quad (4)$$

DM は dispersion measure と呼ばれる量で、単位は  $\text{pc cm}^{-3}$  である。これは  $1\text{cm}^{-3}$  のプラズマ中を DM pc 走ったことを表す量である。400MHz と 300MHz でパルスの到着時間に 1.13sec の差があったので、

$$\Delta t_p(400\text{MHz}) \simeq \frac{1.4 \times 10^{-3}}{16 \times 10^{16}} \text{DM} = \frac{7}{8} \times 10^{-20} \text{DM} \simeq 8.75 \times 10^{-21} \text{DM} \quad (5)$$

$$\Delta t_p(300\text{MHz}) \simeq \frac{1.4 \times 10^{-3}}{9 \times 10^{16}} \text{DM} = \frac{7}{45} \times 10^{-19} \text{DM} \simeq 1.6 \times 10^{-20} \text{DM} \quad (6)$$

$$\therefore (6), (5) \implies 1.13 = \Delta t_p(300\text{MHz}) - \Delta t_p(400\text{MHz}) \simeq 7.25 \times 10^{-21} \text{DM}$$

$$\iff \text{DM} \sim \frac{1.13}{7.25 \times 10^{-21}} \sim 1.6 \times 10^{20} (\text{cm}^{-2}) \sim 53 (\text{pc cm}^{-3}) \quad (7)$$

電子数密度が  $n_e = 0.03\text{cm}^{-3}$  で一様するとき、DM の定義よりパルサーまでの距離を  $d$  とすると

$$\text{DM} = 3 \times 10^{-2} d \iff d = \frac{\text{DM}}{3 \times 10^{-2}} \underset{(7)}{=} 18 \times 10^2 (\text{pc}) = 1.8 (\text{kpc}) \quad (8)$$

## [ 2 ] 外部磁場に沿って進む円偏光電磁波

外部磁場に沿って進む円偏光電磁波の伝搬を考えよう。

2-1.

右回りに円偏光した電磁波に対する分散関係式を導こう。外部磁場を  $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{n}$  とすると、この外部磁場に沿って進む右回り円偏光電磁波の電場は

$$\mathbf{E} = E_- e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \boldsymbol{\epsilon}_- \left( \boldsymbol{\epsilon}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{\epsilon}_1 - i \boldsymbol{\epsilon}_2 \right) \quad (9)$$

また、このとき

$$\mathbf{k} \parallel \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_1 = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2 = \boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2 = 0 \quad (10)$$

などが成り立つ。電子の運動方程式は

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B})) \simeq -e(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_0) \quad (11)$$

である。ここで、電磁波によって引き起こされる Lorentz 力は十分小さいとして無視した。プラズマに電磁波が入射したときの電子の速度と電流密度は

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (12)$$

$$\mathbf{j} = -en_e \mathbf{v} = -en_e \mathbf{v}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (13)$$

のように書ける。(9), (12), (13) 式より

$$-i\omega m_e \mathbf{v}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = -e(E_- e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \boldsymbol{\epsilon}_- + \frac{B_0}{c} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \mathbf{v}_0 \times \mathbf{n}) \iff -i\omega m_e \mathbf{v}_0 = -e(E_- \boldsymbol{\epsilon}_- + \frac{B_0}{c} \mathbf{v}_0 \times \mathbf{n}) \quad (14)$$

この式の両辺を  $\boldsymbol{\epsilon}_-^*$  との内積を取ると

$$\begin{aligned} -i\omega m_e \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_-^* &= -e \left\{ E_- \underbrace{\boldsymbol{\epsilon}_-^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_-}_{=1} + \frac{B_0}{c} \underbrace{\boldsymbol{\epsilon}_-^* \cdot (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{n})}_{=\mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_-^*)} \right\} \stackrel{(9)}{=} -e \left\{ E_- + \frac{B_0}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_1 + i\mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_2) \right\} \\ &= -e \left\{ E_- + \frac{B_0}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{v}_0 \cdot \underbrace{(\boldsymbol{\epsilon}_2 - i\boldsymbol{\epsilon}_1)}_{=-i(\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2)} \right\} \stackrel{(9)}{=} -e \left\{ E_- - i \frac{B_0}{c} \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_-^* \right\} \\ \iff \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_-^* &= \frac{e}{i\omega m_e} (E_- - i \frac{B_0}{c} \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_-^*) = \frac{e}{i\omega m_e} E_- - \frac{1}{\omega} \underbrace{\frac{eB_0}{m_e c}}_{=\omega_{ce}} \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_-^* \iff \left(1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega}\right) \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_-^* = \frac{e}{i\omega m_e} E_- \\ \iff \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_-^* &= \frac{eE_-}{im_e} \frac{1}{\omega + \omega_{ce}} \end{aligned} \quad (15)$$

途中、cyclotron frequency

$$\begin{aligned} \omega_{ce} &\equiv \frac{eB_0}{m_e c} = \underbrace{\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^{1/2}}_{(1/137)^{1/2}} \underbrace{(\hbar c)^{1/2}}_{(197 \text{ MeV} \cdot \text{fm})^{1/2}} \frac{c}{\underbrace{m_e c^2}_{0.5 \text{ MeV}}} B_0 \simeq \sqrt{\frac{200 \times 4 \text{ fm}}{140 \text{ MeV}}} c B_0 \simeq \sqrt{\frac{800 \times 10^{-13}}{140 \times 1.6 \times 10^{-12} \times 10^6}} c B_0 \\ &\simeq \sqrt{\frac{1}{2.8}} \times 3 \times 10^7 B_0 \simeq \sqrt{3} \times 10 \left(\frac{B_0}{1 \mu\text{G}}\right) \simeq 17 \left(\frac{B_0}{1 \mu\text{G}}\right) (s^{-1}) \end{aligned} \quad (16)$$

を導入した。同様に (14) 式の両辺を  $\boldsymbol{\epsilon}_+^* (= \boldsymbol{\epsilon}_-)$  との内積を取ると

$$\begin{aligned} -i\omega m_e \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_+^* &= -e \left\{ E_- \underbrace{\boldsymbol{\epsilon}_+^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_-}_{\boldsymbol{\epsilon}_- \cdot \boldsymbol{\epsilon}_- = 0} + \frac{B_0}{c} \underbrace{\boldsymbol{\epsilon}_+^* \cdot (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{n})}_{\mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_+^*)} \right\} \stackrel{(9)}{=} -\frac{eB_0}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_1 - i\mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_2) \\ &= -\frac{eB_0}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{v}_0 \cdot \underbrace{(\boldsymbol{\epsilon}_2 + i\boldsymbol{\epsilon}_1)}_{i(\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2)} \stackrel{(9)}{=} -\frac{eB_0}{c} \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_+^* \iff \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_+^* = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\therefore (15) (17) \implies \mathbf{v}_0 = \frac{eE_-}{im_e} \frac{1}{\omega + \omega_{ce}} \boldsymbol{\epsilon}_- \quad (\boldsymbol{\epsilon}_+, \boldsymbol{\epsilon}_- \text{ は正規直交基底より}) \quad (18)$$

$$(9), (13), (18) \implies \mathbf{j} = -en_e \frac{eE_-}{im_e} \frac{1}{\omega + \omega_{ce}} \boldsymbol{\epsilon}_- e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = i \frac{e^2 n_e}{m_e (\omega + \omega_{ce})} \mathbf{E} \quad (19)$$

真空中での Maxwell equations より電場や磁場をフーリエ成分を用いて書いたとき、以下の式が成り立つことは以前示した。

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (20)$$

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B} \quad (21)$$

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{i\omega}{c} \mathbf{E} \quad (22)$$

これらを用いると

$$\mathbf{k} \times (21) = i\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = i \underbrace{\{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})\mathbf{k} - k^2 \mathbf{E}\}}_{(20)} = \frac{\omega}{c} \underbrace{i\mathbf{k} \times \mathbf{B}}_{(22)} = \frac{\omega}{c} \left( \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{i\omega}{c} \mathbf{E} \right) \implies -ik^2 \mathbf{E} = \frac{4\pi\omega}{c^2} \mathbf{j} - \frac{i\omega^2}{c^2} \mathbf{E} \quad (23)$$

ここに (19) 式を代入して整理する。

$$-ik^2 \mathbf{E} = i \frac{4\pi\omega e^2 n_e}{m_e c^2 (\omega + \omega_{ce})} \mathbf{E} - \frac{i\omega^2}{c^2} \mathbf{E} \iff \left( k^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\omega \omega_{pe}^2}{\omega + \omega_{ce}} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\therefore \omega^2 = c^2 k^2 + \frac{\omega \omega_{pe}^2}{\omega + \omega_{ce}} \quad (24)$$

2-2.

電磁波が存在しないとき (すなわち一様磁場  $\mathbf{B}_0$  しか存在しないとき)、電子は左回りの円運動をする。この回転方向と同じ方向に電場成分 (偏光ベクトル) が回転するのは右回り・左回りのどちらだろうか。右回り円偏光電磁波が入射したときの電子の速度は、前問の (12), (18) 式より

$$\mathbf{v}_{\text{右}} = \frac{eE_-}{im_e} \frac{1}{\omega + \omega_{ce}} \boldsymbol{\epsilon}_- e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (25)$$

であった。同様に左回り円偏光電磁波の場合の電子の速度は

$$\mathbf{v}_{\text{左}} = \frac{eE_+}{im_e} \frac{1}{\omega - \omega_{ce}} \boldsymbol{\epsilon}_+ e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (26)$$

と書ける。(25), (26) 式より電子は左回り円偏光電磁波の電場の回転方向と同方向に円運動していることがわかる。

左回り円偏光電磁波の電場

$$\mathbf{E} = E_+ e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \boldsymbol{\epsilon}_+ \left( \boldsymbol{\epsilon}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2) \right) \quad (27)$$

より

$$(11), (12), (27) \implies -i\omega m_e \mathbf{v}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = -e \left( E_+ e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \boldsymbol{\epsilon}_+ + \frac{B_0}{c} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \mathbf{v}_0 \times \mathbf{n} \right)$$

$$\iff \mathbf{v}_0 = \frac{e}{i\omega m_e} \left( E_+ \boldsymbol{\epsilon}_+ + \frac{B_0}{c} \mathbf{v}_0 \times \mathbf{n} \right) \quad (28)$$

この両辺を先ほどと同様に  $\epsilon_+^*, \epsilon_-^*$  との内積を取ると

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_0 \cdot \epsilon_+^* &= \frac{e}{i\omega m_e} \left\{ E_+ \underbrace{\epsilon_+ \cdot \epsilon_+^*}_{=1} + \frac{B_0}{c} \underbrace{(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{n}) \cdot \epsilon_+^*}_{=(\mathbf{n} \times \epsilon_+^*) \cdot \mathbf{v}_0} \right\} \stackrel{(27)}{=} \frac{e}{i\omega m_e} \left\{ E_+ + \frac{B_0}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{n} \times \epsilon_1 - i\mathbf{n} \times \epsilon_2) \cdot \mathbf{v}_0 \right\} \\
 &= \frac{e}{i\omega m_e} \left\{ E_+ + \frac{B_0}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{(\epsilon_2 + i\epsilon_1) \cdot \mathbf{v}_0}_{=i(\epsilon_1 - i\epsilon_2)} \right\} \stackrel{(27)}{=} \frac{e}{i\omega m_e} \left\{ E_+ + i \frac{B_0}{c} \epsilon_+^* \cdot \mathbf{v}_0 \right\} \\
 &\iff \mathbf{v}_0 \cdot \epsilon_+^* = \frac{1}{1 - \frac{1}{\omega} \frac{eB_0}{m_e c}} \frac{eE_+}{i\omega m_e} = \frac{eE_+}{im_e} \frac{1}{\omega - \omega_{ce}} \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_0 \cdot \epsilon_-^* &= \frac{e}{i\omega m_e} \left\{ E_+ \underbrace{\epsilon_+ \cdot \epsilon_-^*}_{=\epsilon_+ \cdot \epsilon_+ = 0} + \frac{B_0}{c} \underbrace{(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{n}) \cdot \epsilon_-^*}_{=(\mathbf{n} \times \epsilon_-^*) \cdot \mathbf{v}_0} \right\} = \frac{e}{i\omega m_e} \left\{ \frac{B_0}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{n} \times \epsilon_1 + i\mathbf{n} \times \epsilon_2) \cdot \mathbf{v}_0 \right\} \\
 &= \frac{e}{i\omega m_e} \left\{ \frac{B_0}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{(\epsilon_2 - i\epsilon_1) \cdot \mathbf{v}_0}_{=-i(\epsilon_1 + i\epsilon_2)} \right\} \stackrel{(27)}{=} -\frac{eB_0}{c\omega m_e} \epsilon_-^* \cdot \mathbf{v}_0 \iff \mathbf{v}_0 \cdot \epsilon_-^* = 0 \quad (30)
 \end{aligned}$$

$$\therefore (29), (30) \implies \mathbf{v}_0 = \frac{eE_+}{im_e} \frac{1}{\omega - \omega_{ce}} \epsilon_+ \quad (31)$$

これと (12) 式より (26) 式を得る。

### 2-3.

右回りと左回りの円偏光電磁波ではどちらの位相速度が速いだろうか、波長はどのようだろうか、考察しよう。まず、右回り円偏光電磁波の波数は

$$(24) \implies k_{\text{右}} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \frac{\omega\omega_{pe}^2}{\omega + \omega_{ce}}} \quad (32)$$

次に左回り円偏光電磁波の波数は (25), (26) 式を見比べてやれば

$$k_{\text{左}} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \frac{\omega\omega_{pe}^2}{\omega - \omega_{ce}}} \quad (33)$$

となる。よって位相速度の大小関係は

$$v_{\text{左}} = \frac{\omega}{k_{\text{左}}} > v_{\text{右}} = \frac{\omega}{k_{\text{右}}} \quad (34)$$

波長の大小関係は

$$\lambda_{\text{左}} = \frac{2\pi}{k_{\text{左}}} > \lambda_{\text{右}} = \frac{2\pi}{k_{\text{右}}} \quad (35)$$

である。

### [ 3 ] 宇宙磁場と Faraday rotation

宇宙全体を貫くような磁場が存在するだろうか、あったとしたらどれくらいの強度だろうかという問題を調べた人がいるらしい (Vallee, J.P. ApJ Vol.360, p.1-6(1990))。このお方は 309 個の様々な距離にある天体 (基本的に遠くの銀河) を測定し、宇宙磁場の見積もりを行った。

#### 3-1.

それによると、その存在を示す Faraday 回転成分は受からなかった。この結果から、宇宙全体を貫くような磁場が存在したとしても、それによる rotation measure は  $2 \text{ rad m}^{-2}$  以下であるという上限が得られた。宇宙の半径を 100 億光年、宇宙の電子数密度を  $n_e \sim 2 \times 10^{-7} \text{ cm}^{-3}$  とし、そのような宇宙磁場の強度の上限を求めてみよう。そのためにまず Faraday 回転を見極める。

(32), (33) 式において、電磁波では  $\omega \gg \omega_{ce}, \omega \gg \omega_{pe}$  とすると

$$k_{\text{右}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2(1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega})}} \simeq \frac{\omega}{c} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^2 \frac{1}{1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega}} \right\} \simeq \frac{\omega}{c} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^2 \left( 1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right) \right\} \quad (36)$$

$$k_{\text{左}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2(1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega})}} \simeq \frac{\omega}{c} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^2 \frac{1}{1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega}} \right\} \simeq \frac{\omega}{c} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^2 \left( 1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right) \right\} \quad (37)$$

よってプラズマ中を距離  $d$  進んだときに右回りと左回り円偏光電磁波の間に生じる位相差は

$$\Delta\phi = \phi_{\text{右}} - \phi_{\text{左}} = \int_0^d (k_{\text{右}} - k_{\text{左}}) ds = \int_0^d \frac{\omega}{c} \left( \frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^2 \left( \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right) ds = \int_0^d \frac{1}{c\omega^2} \underbrace{4\pi n_e e^2}_{=\omega_{pe}^2} \underbrace{eB_0}_{=\omega_{ce}} ds = \frac{4\pi e^3}{m_e^2 c^2 \omega^2} \int_0^d n_e B_0 ds \quad (38)$$

よって Faraday 回転角は

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \Delta\phi = \frac{2\pi e^3}{m_e^2 c^2 \omega^2} \int_0^d n_e \mathbf{B}_0 \cdot ds \equiv \text{RM} \lambda^2 \quad (39)$$

と書ける。ここで  $\text{RM}(\text{rad m}^{-2})$  は波長  $1\text{m}$  の電磁波が伝播したときに Faraday 回転による偏光方向の回転が  $\text{RM rad}$  になるものとして定義されている量である。(39) 式と  $\lambda = (2\pi)/k$  より

$$\begin{aligned} \text{RM} &= \frac{2\pi e^3}{m_e^2 c^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \underbrace{\frac{k^2}{\omega^2}}_{1/c^2} \int_0^d n_e \mathbf{B}_0 \cdot ds = \frac{e^3}{2\pi m_e^2 c^4} \int_0^d n_e \mathbf{B}_0 \cdot ds = \frac{1}{2\pi} \left( \underbrace{\frac{e^2}{\hbar c}}_{1/137} \underbrace{\frac{\hbar c}{(m_e c^2)^{4/3}}}_{0.5\text{MeV}} \right)^{3/2} \int_0^d n_e \mathbf{B}_0 \cdot ds \\ &\simeq \frac{1}{6} \left( \frac{200\text{fm}}{140 \times 0.5^{4/3} \text{MeV}^{1/3}} \right)^{3/2} \int_0^d n_e \mathbf{B}_0 \cdot ds \simeq \frac{1}{6} \left( \frac{10 \times 10^{-13}}{7 \times 0.5^{4/3} (10^6 \times 1.6 \times 10^{-12})^{1/3}} \right)^{3/2} \int_0^d n_e \mathbf{B}_0 \cdot ds \\ &\simeq \frac{1}{6} \left( \frac{10}{7} \frac{10^{-13}}{(1.6 \times 10^{-6})^{1/3}} \right)^{3/2} \int_0^d n_e \mathbf{B}_0 \cdot ds = \frac{1}{6 \times 7^{3/2}} \times 10^{-29/2} \int_0^d n_e \mathbf{B}_0 \cdot ds \simeq 2.8 \times 10^{-17} \int_0^d n_e \mathbf{B}_0 \cdot ds \quad (40) \end{aligned}$$

である。RM が最大となるのは  $\mathbf{B}_0 \parallel ds$  のときで、このとき  $\text{RM} = 2 \text{ Rad m}^{-2} = 2 \times 10^{-4} \text{ Rad cm}^{-2}$  であった。(40) 式にコレと電子数密度の値を入れると

$$2.0 \times 10^{-4} = 2.8 \times 10^{-17} \times 2.0 \times 10^{-7} \times (1 \times 10^{10} \times \underbrace{365 \times 24 \times 60 \times 60 \times 3.0 \times 10^{10}}_{1 \text{ 光年} \sim 9.46 \times 10^{17} \text{ cm}}) B_0 \iff B_0 \sim 3.8 \times 10^{-9} \text{ (G)} \quad (41)$$

### 3-2.

2 rad m<sup>-2</sup> の回転を引き起こす宇宙磁場があったとして、波長 10cm と 1cm、及び波長 1cm と 1mm での Faraday 回転による回転角の差はいくらになるかを見積もってみよう。(39) 式より

$$\Delta\theta(\lambda) = 2 \times 10^{-4} \lambda^2 = \begin{cases} 2 \times 10^{-2} & (\lambda = 10\text{cm}) \\ 2 \times 10^{-4} & (\lambda = 1\text{cm}) \\ 2 \times 10^{-6} & (\lambda = 0.1\text{cm}) \end{cases} \quad (42)$$

よって波長 10cm と 1cm の回転角の差は 1.98 × 10<sup>-2</sup>rad、波長 1cm と 1mm の回転角の差は 1.98 × 10<sup>-4</sup>rad である。

### 3-3.

各天体は天体に付随した磁場やたまたま手前にいた天体による Faraday 回転を受けるこのような天体固有の成分が混ざっている中、どのようにしたら宇宙磁場による Faraday 回転の成分の情報を引き出すことが出来るだろうか。

以下は僕が学部 3 年生の時に思いついた解答。

同程度の質量、同程度の進化を遂げた天体に付随する磁場は同じ強さを持つと思われるので、そのような天体をいくつかピックアップし、電磁波の Faraday 回転を調べることで一様磁場の方向と大きさを見積もることが出来る。fig2 のように考える。天体 1 から発せられる電磁波は(一様磁場による Faraday 回転)+(天体 1 固有磁場による Faraday 回転)を受ける。天体 2 から発せられる電磁波は、一様磁場に対して垂直なので(天体 2 固有磁場による Faraday 回転)のみを受ける。天体 3 から発せられる電磁波は一様磁場と向きが逆なので天体 1 からの電磁波が一様磁場から受ける Faraday 回転の方向と逆向きの回転を受ける。すなわち-(一様磁場による Faraday 回転)+(天体 3 固有磁場による Faraday 回転)となる。天体 1, 2, 3 の固有磁場が同じ強さであれば、3 つの電磁波を比べるときに固有磁場による Faraday 回転を考える必要がなくなり、純粋に一様磁場による Faraday 回転のみを比較することが出来る。質量・明るさ・構造などが似ている天体では固有磁場も等しいと考えられるので、このような方法で一様磁場の向きと大きさを知ることが出来る。

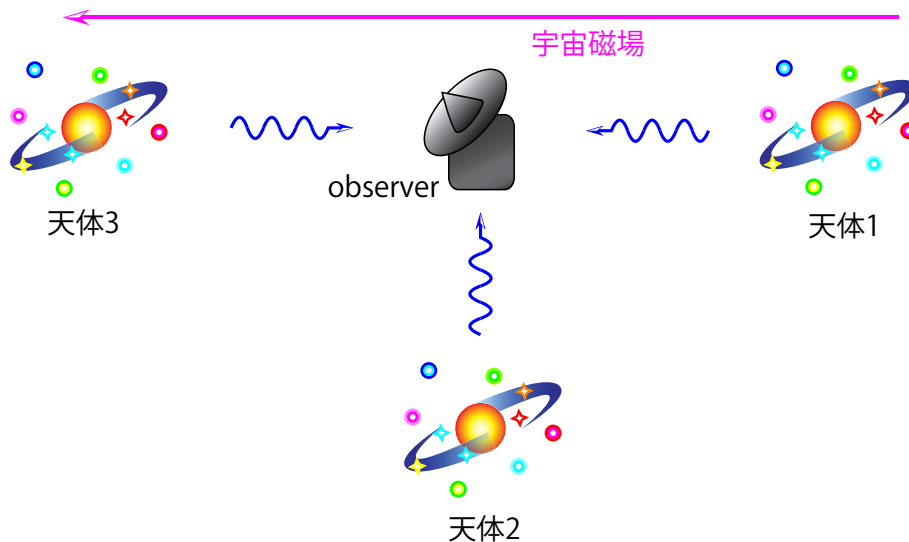


fig 2: 宇宙磁場の観測の仕方を自分なりに考えてみた。

たまたま手前に天体が存在するときには直接届く電磁波を観測するのではなく、プラズマ中でトムソン散乱を受けた電磁波を観測することで一様磁場のみの Faraday 回転成分を調べることが出来ると考えた (fig3)。トムソン散乱は弾性散乱であり、散乱前後で振動数が変化しないことから、トムソン散乱によってファラデー回転成分は変化しない。以前のレポートで中心に明るい点状天体を含む球状の星間雲を考えたとき、偏光は fig4 の様になった。もし一様磁場が存在すれば偏光は Faraday 回転を受けて fig5 のようになる。これにより回転成分の見積もりが可能となる。

この解答の問題点を先生は以下のように指摘。

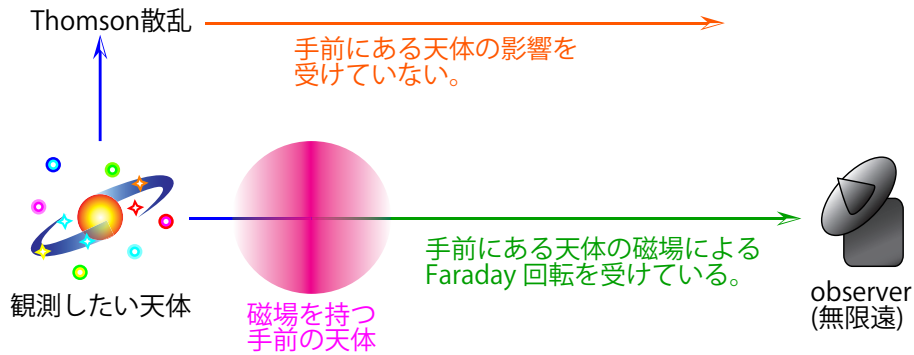


fig 3: 観測したい天体の手前に磁場を持つ天体がある場合の観測法を自分なりに考えてみた。

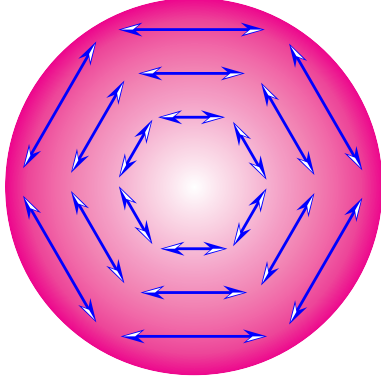


fig 4: Faraday 回転なし。

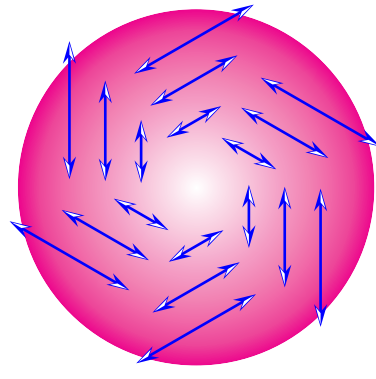


fig 5: Faraday 回転あり。

1. 天体固有の磁場の向きと視線方向とのなす角は天体 1, 2, 3 で無相関なので、RM は  $-RM_0 \sim RM_0$  までランダムな値を取る。
2. たった 3 つでは無理でしょう。
3. 天体の固有磁場により、天体から発せられた電磁波はすでに Faraday 回転を受けている。従って天体固有の Faraday 回転はプラズマで散乱された電磁波も同じく受けてしまっている。
4. プラズマ自身が磁場をもっているので、プラズマ中で散乱された電磁波を見るのであればそれによる Faraday 回転も差し引かなければならない。

ご指摘、感謝至極に存じます。で、論文を書いた方々はどうしたかという、全天を 4 分割だか 8 分割して横軸を距離 (実際には red shift)、縦軸を観測により得た RM とし、プロットされたグラフを最小 2 乗法で一次関数として fitting する。もし一様磁場がなければ、手前の天体の磁場や観測した天体の固有磁場は無相関であるから、観測した天体に関して RM を平均すると 0 (すなわちプロットしたグラフを 1 次関数で fitting したときに傾きが 0) となるはずである。傾きがあるとすれば、それは宇宙の一様磁場による効果と考えることが出来る、として一様磁場の情報を引き出したようである。

## [ 4 ] 2 つの電子の系の dipole moment

2 つの電子がお互いの Coulomb 力で影響を及ぼし合い、運動している系を考えよう。この系の dipole moment の時間 2 階微分がゼロであることを示す。この系の dipole moment は

$$\mathbf{d} = -e\mathbf{r}_1 + (-e\mathbf{r}_2) = -e(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \quad (43)$$

である。一方、2 つの電子の運動方程式は



$$\begin{cases} m_e \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ m_e \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{e^2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \end{cases} \quad (44)$$

(44) 式の両辺を足し合わせて

$$m_e (\ddot{\mathbf{r}}_1 + \ddot{\mathbf{r}}_2) = \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{0} \implies \therefore \ddot{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \quad (45)$$

よって題意が示された。

## [ 5 ] relativistic beaming effect

Relativistic beaming effect (相対論的ビーミング効果) について考えよう。輻射場の電場は

$$\mathbf{E} = \frac{q}{c} \left[ \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{\kappa^3 R} \right] \quad (46)$$

のように書けた。  $\kappa = 1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = 1 - \beta \cos \theta$  であり、  $\mathbf{n}$  は電荷から観測者の方向を向く単位ベクトルである。以下では電荷の運動が相対論的で、  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} \gg 1$  とする。また以下では  $\theta \ll 1$  としよう。

5-1.

$\beta$  を  $\gamma$  で書き換え、さらに  $\kappa$  を  $\theta$  の関数に書き換えよう。ただし、  $\theta \ll 1$  とする。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \implies \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \quad (47)$$

$$\kappa(\theta) = 1 - \underbrace{\beta}_{(47)} \overbrace{\cos \theta}^{\simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}} \simeq 1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{1}{2\gamma^2} + \underbrace{\frac{\theta^2}{4\gamma^2}}_{\text{微少量}}\right) \simeq \frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2\gamma^2} = \frac{1}{2\gamma^2} (\gamma^2 \theta^2 + 1) \quad (48)$$

$\kappa$  は fig6 のような  $\theta$  の 2 次関数である。

5-2.

$\theta = 0$  での電場強度は  $\theta = \pi$  での電場強度の何倍になるだろうか。  $\theta = 0$  のとき、  $\boldsymbol{\beta} = \beta \mathbf{n}$  より  $\kappa(0) = 1 - \beta$  であるから、

$$\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta} = (1 - \beta) \mathbf{n} = \kappa(0) \mathbf{n} \quad (49)$$

よって (46) 式より

$$\mathbf{E}_0 = \frac{q}{c} \left[ \frac{\mathbf{n} \times (\kappa(0) \mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{\kappa(0)^3 R} \right] = \frac{q}{c} \left[ \frac{1}{\kappa(0)^2} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right] = \frac{q}{c} \left[ \frac{1}{\kappa(0)^2} \{(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}}\} \right] \quad (50)$$

$\theta = \pi$  のとき、  $\boldsymbol{\beta} = -\beta \mathbf{n}$  より  $\kappa(\pi) = 1 + \beta$  であるから、

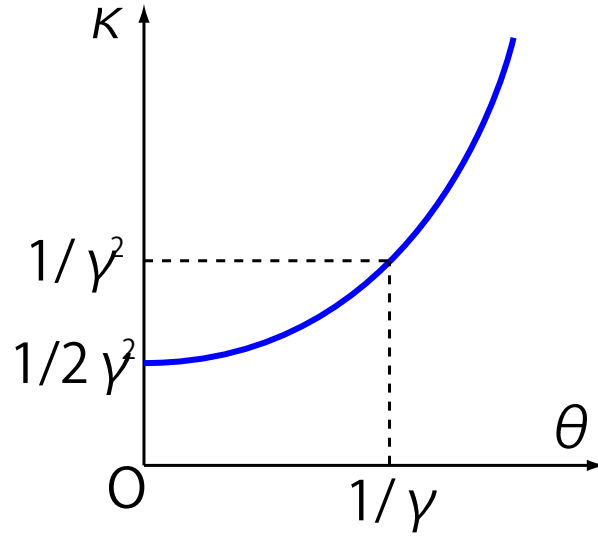


fig 6:  $\kappa(\theta)$  の関数。

$$\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta} = (1 + \beta)\mathbf{n} = \kappa(\pi)\mathbf{n} \quad (51)$$

より

$$\mathbf{E}_\pi = \frac{q}{c} \left[ \frac{\mathbf{n} \times (-\kappa(\pi)\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{\kappa(\pi)^3 R} \right] = \frac{q}{c} \left[ \frac{1}{\kappa(\pi)^2} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right] = -\frac{q}{c} \left[ \frac{1}{\kappa(\pi)^2} \{(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}}\} \right] \quad (52)$$

$$\therefore (50), (52) \implies E_0 = \left[ \frac{\kappa(\pi)^2}{\kappa(0)^2} \right] E_\pi \quad (53)$$

$$\begin{cases} \kappa(0) = 1 - \beta \simeq 1 - (1 - \frac{1}{2\gamma^2}) = \frac{1}{2\gamma^2} \\ \kappa(\pi) = 1 + \beta \simeq 1 + (1 - \frac{1}{2\gamma^2}) = 2 - \frac{1}{2\gamma^2} \sim 2 \quad (\gamma \gg 1 \text{ より}) \end{cases} \quad (54)$$

$$\therefore (53), (54) \implies E_0 = [16\gamma^4] E_\pi \quad (55)$$

よって  $\theta = 0$  での電場強度は  $\theta = \pi$  の  $[16\gamma^4]$  倍であることが示された。

5-3.

5-1 より  $\kappa$  は  $\theta$  の 2 次関数である。(6) 式の形より  $\theta < 1/\gamma$  では  $\kappa$  の増加が鈍く、 $\kappa > 1/\gamma$  で  $\kappa$  は急激に増加する。(46) 式より  $\kappa$  の値が小さければ電場強度が大きくなるから、放射は  $\theta < 1/\gamma$  の角度に集中することがわかる。

5-4.

上記の結果を Relativistic beaming effect という。時空図 fig7 からこの現象を説明しよう。

簡単のため電荷の運動は  $x$  方向のみとする。観測者は  $x = 0$  に静止しているとする。点電荷の取りうる事象を  $A(ct_A, x_A)$ ,  $B(ct_B, x_B)$ ,  $C(ct_C, x_C)$ ,  $D(ct_D, x_D)$  のように書こう (ただし  $x_A < x_B < x_C < x_D$  かつ  $t_A < t_B < t_C < t_D$ )。このとき、 $t \sim t + \Delta t$  に観測者が受け取ることが出来る電磁波は A B、A C、A D の間に電荷が発した電磁波である。電荷の速度が相対論的になり、時空図上を A B でなく A D のように移動する場合には電磁波の届く量 (電荷からの情報量) が多くなるために電磁波の強度が大きくなる。

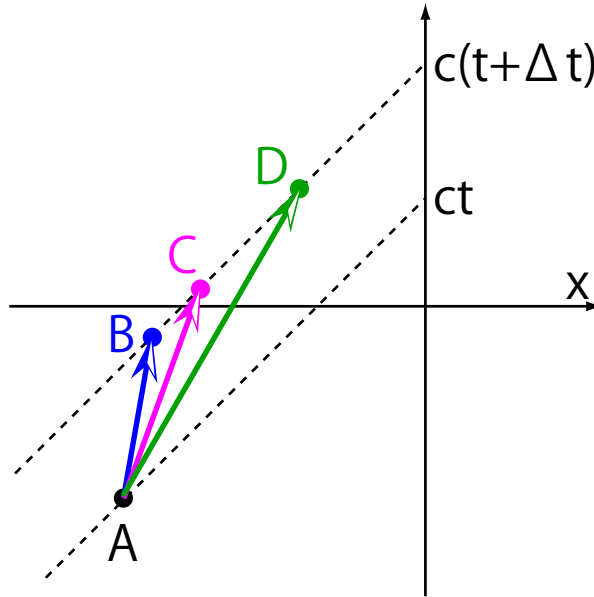


fig 7: 時空図による説明。

## [ 6 ] 無偏光の意味と Stokes parameters

無偏光電磁波について考えよう。無偏光電磁波は360度様々な方向に直線偏光したほぼ同じ強度で互いの初期位相が random な多数の電磁波の重ね合わせとして表現できる。以下では N 個の直線偏光電磁波から無偏光電磁波が出来ているとしよう。

6-1.

n 番目の電磁波の電場の x, y 成分が

$$\begin{cases} E_x^{(n)} = a_1^{(n)} e^{i\delta_1^{(n)}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \\ E_y^{(n)} = a_2^{(n)} e^{i\delta_2^{(n)}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \end{cases} \quad (56)$$

のように書けるとする (複素数表示)。直線偏光なので

$$\delta^{(n)} \equiv \delta_2^{(n)} - \delta_1^{(n)} = 0 \text{ or } \pi \quad (57)$$

だが、無偏光電磁波を考えているのでどちらを取るかは random である。無偏光電磁波の Stokes parameters を書き下そう。まず、n 番目の Stokes parameters は

$$\begin{cases} I^{(n)} = a_1^{(n)2} + a_2^{(n)2} \\ Q^{(n)} = a_1^{(n)2} - a_2^{(n)2} \\ U^{(n)} = 2a_1^{(n)} a_2^{(n)} \cos \delta^{(n)} \\ V^{(n)} = 2a_1^{(n)} a_2^{(n)} \sin \delta^{(n)} \end{cases} \quad (58)$$

のように書かれるのであった。(56) 式より

$$a_1^{(n)2} = |a_1^{(n)}|^2 = a_1^{(n)} a_1^{(n)*} = a_1^{(n)} a_1^{(n)*} \underbrace{e^{i\delta_1^{(n)}} e^{-i\delta_1^{(n)}}}_{=1} \underbrace{e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}}_{=1} = E_x^{(n)} E_x^{(n)*} \quad (59)$$

$$a_2^{(n)2} = |a_1^{(n)}|^2 = a_2^{(n)} a_2^{(n)*} = a_2^{(n)} a_2^{(n)*} \underbrace{e^{i\delta_2^{(n)}} e^{-i\delta_2^{(n)}}}_{=1} \underbrace{e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}}_{=1} = E_y^{(n)} E_y^{(n)*} \quad (60)$$

$$E_x^{(n)} E_y^{(n)*} = a_1^{(n)} e^{i\delta_1^{(n)}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} a_2^{(n)*} e^{-i\delta_2^{(n)}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} = a_1^{(n)} a_2^{(n)} e^{-i\delta} \quad (61)$$

$$E_y^{(n)} E_x^{(n)*} = a_2^{(n)} e^{i\delta_2^{(n)}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} a_1^{(n)*} e^{-i\delta_1^{(n)}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} = a_1^{(n)} a_2^{(n)} e^{i\delta} \quad (62)$$

途中、 $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}$  が実数であることを用いた。

$$\therefore (58) \sim (62) \implies \begin{cases} I^{(n)} = E_x^{(n)} E_x^{(n)*} + E_y^{(n)} E_y^{(n)*} \\ Q^{(n)} = E_x^{(n)} E_x^{(n)*} - E_y^{(n)} E_y^{(n)*} \\ U^{(n)} = a_1^{(n)} a_2^{(n)} (e^{i\delta^{(n)}} + e^{-i\delta^{(n)}}) = E_x^{(n)} E_y^{(n)*} + E_y^{(n)} E_x^{(n)*} \\ V^{(n)} = \frac{1}{i} a_1^{(n)} a_2^{(n)} (e^{i\delta^{(n)}} - e^{-i\delta^{(n)}}) = i(E_x^{(n)} E_y^{(n)*} - E_y^{(n)} E_x^{(n)*}) \end{cases} \quad (63)$$

6-2.

(56) 式を用いて無偏光電磁波は

$$\begin{cases} E_x = \sum_{n=1}^N E_x^{(n)} = \sum_{n=1}^N a_1^{(n)} e^{i\delta_1^{(n)}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \\ E_y = \sum_{n=1}^N E_y^{(n)} = \sum_{n=1}^N a_2^{(n)} e^{i\delta_2^{(n)}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \end{cases} \quad (64)$$

のように書ける。そしてこの電磁波の Stokes parameters を

$$\begin{cases} I = E_x E_x^* + E_y E_y^* \\ Q = E_x E_x^* - E_y E_y^* \\ U = E_x E_y^* + E_y E_x^* \\ V = i(E_x E_y^* - E_y E_x^*) \end{cases} \quad (65)$$

のように定義しよう。無偏光なので、異なる  $n$  の電磁波間での初期位相  $\delta_1^{(n)}$  は無相関であり、 $0 \sim 2\pi$  間の random な値を取る。このとき (65) 式はどのように書けるだろうか。(64) 式を代入して計算しよう。

$$\begin{aligned} I &= \left( \sum_{n=1}^N a_1^{(n)} e^{i\delta_1^{(n)}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \left( \sum_{m=1}^N a_1^{(m)} e^{-i\delta_1^{(m)}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) + \left( \sum_{n=1}^N a_2^{(n)} e^{i\delta_2^{(n)}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \left( \sum_{m=1}^N a_2^{(m)} e^{-i\delta_2^{(m)}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \\ &= \sum_{n=1}^N a_1^{(n)2} + \sum_{n \neq m}^N a_1^{(n)} a_1^{(m)} e^{i(\delta_1^{(n)} - \delta_1^{(m)})} + \sum_{n=1}^N a_2^{(n)2} + \sum_{n \neq m}^N a_2^{(n)} a_2^{(m)} e^{i(\delta_2^{(n)} - \delta_2^{(m)})} \\ &= \sum_{n=1}^N (a_1^{(n)2} + a_2^{(n)2}) + \sum_{n \neq m}^N (a_1^{(n)} a_1^{(m)} e^{i(\delta_1^{(n)} - \delta_1^{(m)})} + a_2^{(n)} a_2^{(m)} e^{i(\delta_2^{(n)} - \delta_2^{(m)})}) \end{aligned} \quad (66)$$

$N$  が非常に大きいとき、 $\delta_1^{(n)} - \delta_1^{(m)}, \delta_2^{(n)} - \delta_2^{(m)}$  は様々な値を取る。これは  $0 \sim 2\pi$  で random に様々な位相が現れることを意味する。すると (66) 式の第 2 項の  $\sum$  の中の exponential は  $-1 \sim 1$  の様々な値を取るようになるが、それらを足し合わせた物は中心極限定理から 0 をピークとする正規分布に漸近する (ただし、 $n \neq m$  のとき)。 $N \rightarrow \infty$  のときはデルタ関数となる。

$\therefore N \rightarrow \infty$  のとき

$$I = \sum_{n=1}^N (a_1^{(n)2} + a_2^{(n)2}) \underset{(58)}{=} \sum_{n=1}^N I^{(n)} \quad (67)$$

となる。同様に  $Q$  も計算しよう。先ほどと同じ理屈より

$$\begin{aligned} Q &= \left( \sum_{n=1}^N a_1^{(n)} e^{i\delta_1^{(n)}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \left( \sum_{m=1}^N a_1^{(m)} e^{-i\delta_1^{(m)}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) - \left( \sum_{n=1}^N a_2^{(n)} e^{i\delta_2^{(n)}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \left( \sum_{m=1}^N a_2^{(m)} e^{-i\delta_2^{(m)}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \\ &= \sum_{n=1}^N a_1^{(n)2} + \sum_{n \neq m}^N a_1^{(n)} a_1^{(m)} e^{i(\delta_1^{(n)} - \delta_1^{(m)})} - \sum_{n=1}^N a_2^{(n)2} - \sum_{n \neq m}^N a_2^{(n)} a_2^{(m)} e^{i(\delta_2^{(n)} - \delta_2^{(m)})} \\ &= \sum_{n=1}^N (a_1^{(n)2} - a_2^{(n)2}) + \sum_{n \neq m}^N (a_1^{(n)} a_1^{(m)} e^{i(\delta_1^{(n)} - \delta_1^{(m)})} - a_2^{(n)} a_2^{(m)} e^{i(\delta_2^{(n)} - \delta_2^{(m)})}) \underset{N \rightarrow \infty}{=} \sum_{n=1}^N (a_1^{(n)2} - a_2^{(n)2}) = \sum_{n=1}^N Q^{(n)} \quad (68) \end{aligned}$$

である。しかし今度は  $Q^{(n)}$  自身が random に正負の値を取り得るので、その総和を取ったものは 0 である。

$$\therefore Q = 0 \quad (69)$$

今度は  $U$  を計算する。

$$\begin{aligned} U &= \left( \sum_{n=1}^N a_1^{(n)} e^{i\delta_1^{(n)}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \left( \sum_{m=1}^N a_2^{(m)} e^{-i\delta_2^{(m)}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) + \left( \sum_{n=1}^N a_1^{(n)} e^{-i\delta_1^{(n)}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \left( \sum_{m=1}^N a_2^{(m)} e^{i\delta_2^{(m)}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \\ &= \sum_{n=1}^N a_1^{(n)} a_2^{(n)} e^{-i\delta^{(n)}} + \sum_{n \neq m}^N a_1^{(n)} a_2^{(m)} e^{i(\delta_1^{(n)} - \delta_2^{(m)})} + \sum_{n=1}^N a_1^{(n)} a_2^{(n)} e^{i\delta^{(n)}} + \sum_{n \neq m}^N a_1^{(n)} a_2^{(m)} e^{-i(\delta_1^{(n)} - \delta_2^{(m)})} \\ &= \sum_{n=1}^N a_1^{(n)} a_2^{(n)} 2 \cos \delta^{(n)} + \sum_{n \neq m}^N a_1^{(n)} a_2^{(m)} e^{i(\delta_1^{(n)} - \delta_2^{(m)})} 2 \cos(\delta_1^{(n)} - \delta_2^{(m)}) \underset{N \rightarrow \infty}{=} \sum_{n=1}^N 2 a_1^{(n)} a_2^{(n)} \cos \delta^{(n)} = \sum_{n=1}^N U^{(n)} \quad (70) \end{aligned}$$

直線偏光の重ね合わせより (57) 式を思い出すと、 $\cos \delta^{(n)} = \pm 1$  である。これらの総和を取れば先ほどと同じく 0 である。

$$\therefore U = 0 \quad (71)$$

最後に  $V$ 。

$$V = i \left\{ \left( \sum_{n=1}^N a_1^{(n)} e^{i\delta_1^{(n)}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \left( \sum_{m=1}^N a_2^{(m)} e^{-i\delta_2^{(m)}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) - \left( \sum_{n=1}^N a_1^{(n)} e^{-i\delta_1^{(n)}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \left( \sum_{m=1}^N a_2^{(m)} e^{i\delta_2^{(m)}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= i \left\{ \sum_{n=1}^N a_1^{(n)} a_2^{(n)} e^{-i\delta^{(n)}} + \sum_{n \neq m}^N a_1^{(n)} a_2^{(m)} e^{i(\delta_1^{(n)} - \delta_2^{(m)})} - \sum_{n=1}^N a_1^{(n)} a_2^{(n)} e^{i\delta^{(n)}} - \sum_{n \neq m}^N a_1^{(n)} a_2^{(m)} e^{-i(\delta_1^{(n)} - \delta_2^{(m)})} \right\} \\
&= i \left\{ \sum_{n=1}^N a_1^{(n)} a_2^{(n)} (-2i \sin \delta^{(n)}) + \sum_{n \neq m}^N a_1^{(n)} a_2^{(m)} e^{i(\delta_1^{(n)} - \delta_2^{(m)})} (-2i \sin(\delta_1^{(n)} - \delta_2^{(m)})) \right\} \underbrace{=}_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N 2a_1^{(n)} a_2^{(n)} \sin \delta^{(n)} \\
&= \sum_{n=1}^N V^{(n)} \tag{72}
\end{aligned}$$

今度は (57) 式より  $\sin \delta^{(n)} = 0$  である。

$$\therefore V = 0 \tag{73}$$