

[1] 球状星間雲の散乱光の観測

中心に明るい点状天体を含む球状の一様な星間雲があるとしよう。星間雲は完全電離していて自由電子が飛び交っている。この電子により中心天体から放出された電磁波は Thomson 散乱を受ける。この星間雲は散乱光にのみより観測可能であるとする。中心天体からの電磁波は無偏光とし、散乱回数は高々1回であるとする。

1-1.

この星間雲の見かけのサイズより観測装置の空間分解能が十分高い時。fig1 のように考える。n は散乱波の進行方向ベクトル、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は偏光ベクトルである。また $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ である。Thomson 散乱における無偏光電磁波の散乱波の Stokes parameters と偏光度は

$$\left\{ \begin{array}{l} I = \left(\frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \theta) \\ Q = \left(\frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \right)^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ U = V = 0 \\ \Pi = \frac{1 - \cos^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \end{array} \right. \quad (1)$$

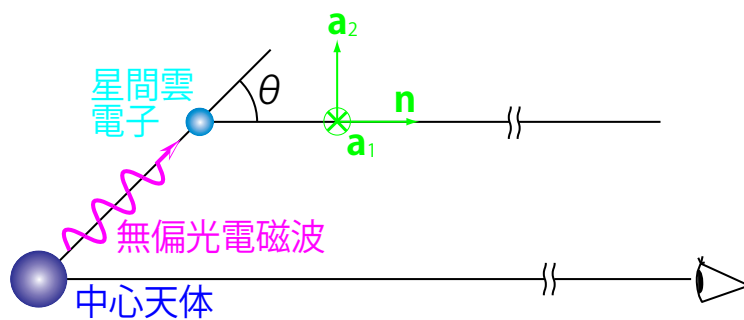


fig 1: 座標設定。

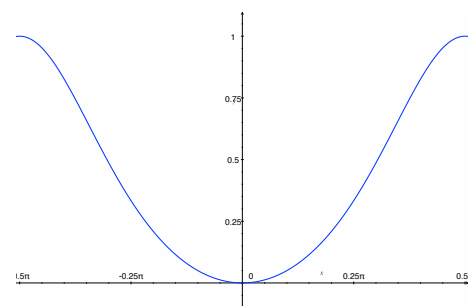


fig 2: 偏光度。

であった。Pi を図示すると fig2 のようになる。 $\theta = 0$ では $\Pi = 0$ ($Q = U = V = 0$) よりこれは無偏光状態である。よって偏光は観測されない。偏光度は外側に行くにつれて大きくなり、 $\theta = \pi/2, -\pi/2$ で最大になる。 $\theta \neq 0$ では常に \mathbf{a}_1 方向の直線偏光である。観測者と点状天体とを結ぶ直線を軸として軸対称な系となっていることから、偏光度と偏光の向きを図示すると fig3 のようになる。外側の、色が濃く矢印が大きいところほど偏光度が大きい。

1-2.

この星間雲の見かけのサイズより観測装置の空間分解能が悪く、この雲が分解して見えない時。各点での偏光が見えず、全て重ね合わさった形で観測される。 θ を固定した位置、すなわち同心円上での偏光度は等しいのでそれらが無相関に重ね合わされば無偏光となる。よってこの星間雲は無偏光として観測される。

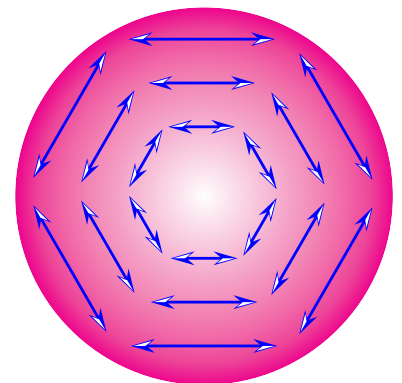


fig 3: 偏光観測の様子。

1-3.

この星間雲の大きさを 1Mpc としたとき、中心天体が直接観測できるための電子の個数密度の上限値 n_{max} を求めよう。電磁波が 0.5Mpc 走る間に 1 回も散乱を受けることなく観測者のもとに届けば、直接観測できることになる。よって 1 回の散乱を受けるときの個数密度より

$$0.5\text{Mpc} \times n_{max} \sigma_T = 1 \implies n_{max} = \frac{1}{0.5\text{Mpc} \sigma_T} \sim \frac{1}{\frac{3}{2} \times 10^{24} \times \frac{2}{3} \times 10^{-24}} (\text{cm}^{-3}) = 1 (\text{cm}^{-3}) \quad (2)$$

[2] Debye 波長の算出

デバイ波長の定義

$$\begin{aligned} \lambda_D &\equiv \sqrt{\frac{k_B T}{4\pi e^2 n_e}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{T}{10^4 \text{K}}\right) \text{eV}}{4\pi \frac{e^2}{\hbar c} \hbar c n_e}} \simeq \sqrt{\frac{T}{10^4 \text{K}} \text{eV} \frac{1}{12} \frac{1}{\frac{1}{137} 197 \text{MeV} \cdot \text{fm}} \frac{1}{n_e}} \simeq \sqrt{\frac{T}{10^4 \text{K}} \frac{1}{\frac{120}{7} \times 10^{-7} n_e}} \\ &\simeq 7 \times 10^2 \left(\frac{T}{10^4 \text{K}}\right)^{1/2} \left(\frac{n_e}{1 \text{cm}^{-3}}\right)^{-1/2} (\text{cm}) \end{aligned} \quad (3)$$

また、デバイ波長を半径とする球内部にいる電子数は

$$\Lambda_c = \frac{4\pi}{3} \lambda_D^3 n_e \simeq 1 \times 10^9 \left(\frac{T}{10^4 \text{K}}\right)^{3/2} \left(\frac{n_e}{1 \text{cm}^{-3}}\right)^{-1/2} \quad (4)$$

である。温度と電子数密度を星間ガスの典型的な値で規格化しておいた。この標識にしておけば何かと便利である。

[3] プラズマの電気的中性

中心に点電荷 q_0 が存在するときのプラズマ中の静電ポテンシャルは

$$\phi = \frac{q_0}{r} e^{-r/\lambda_D} \quad (5)$$

で与えられていた。空間全体で電荷を積分積分することによって得られる全電荷量 Q はどうなるだろうか。プラズマ中の電子の個数密度は、弱結合プラズマの場合に

$$n_e = n_p e^{\frac{e\phi}{k_B T}} \underset{e\phi \ll k_B T}{\simeq} n_p \left(1 + \frac{e\phi}{k_B T}\right) \quad (6)$$

となる。よって $r \neq 0$ での電荷密度は

$$\rho(r) = e \left[n_p - n_p \left(1 + \frac{e}{k_B T} \frac{q_0}{r} e^{-r/\lambda_D}\right) \right] = -\frac{e^2 n_p q_0}{k_B T r} e^{-r/\lambda_D} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
\therefore Q &= q_0 - \frac{e^2 n_p q_0}{k_B T} \int_{+0}^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta r^2 \sin\theta \frac{e^{-r/\lambda_D}}{r} = q_0 - 4\pi \frac{e^2 n_p q_0}{k_B T} \int_{+0}^{\infty} dr r e^{-r/\lambda_D} \\
&= q_0 - 4\pi \frac{e^2 n_p q_0}{k_B T} \left(\left[-\lambda_D e^{-r/\lambda_D} r \right]_{+0}^{\infty} - \int_{+0}^{\infty} (-\lambda_D) e^{-r/\lambda_D} dr \right) \\
&= q_0 - 4\pi \frac{e^2 n_p q_0}{k_B T} \lambda_D \left[(-\lambda_D) e^{-r/\lambda_D} \right]_{+0}^{\infty} \underbrace{=}_{(3)} q_0 - q_0 = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

よって電氣的に中性が保たれていることがわかる。

[4] 弱結合プラズマの物理的性質の理解

4-1.

プラズマの粒子間のクーロン力と熱運動のエネルギーの比を Γ と書くことにする。これと Debye length 内の電子数 Λ_c の関係を調べると

$$\Gamma = \frac{\frac{e^2}{R}}{\frac{3}{2}k_B T} \simeq \frac{e^2 n_e^{1/3}}{\frac{3}{2}k_B T} = \frac{2}{3} \frac{4\pi e^2 n_e}{k_B T} \frac{1}{4\pi n_e^{2/3}} = \frac{1}{6\pi} \frac{1}{\lambda_D^2 n_e^{2/3}} = \frac{1}{6\pi} \underbrace{\left(\frac{4\pi}{3} \lambda_D^3 n_e \right)^{-2/3}}_{=\Lambda_c^{-2/3}} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{2/3} \simeq \frac{1}{\Lambda_c^{2/3}} \tag{9}$$

4-2.

電子がイオンによって散乱される mean free path λ_e と Debye length λ_D の比を求めよう。まず電子がイオンによる電磁波散乱の散乱断面積は Rutherford 散乱の散乱断面積より、

$$\sigma_R = \pi \left(\underbrace{\frac{e^2}{m_e v_0^2}}_{= \frac{1}{3k_B T}} \right)^2 = \pi \left(\frac{e^2}{3k_B T} \right)^2 \tag{10}$$

mean free path の定義式より

$$\lambda_e = \frac{1}{\underbrace{\sigma_R}_{(10)} \underbrace{n_p}_{=n_e}} = \frac{9}{\pi n_e} \frac{\left(\frac{k_B T}{e^2} \right)^2}{(4\pi n_e \lambda_D^2)^2} = 9 \times 16\pi n_e \lambda_D^4 \implies \frac{\lambda_D}{\lambda_e} = \frac{1}{9 \times 4 \times 3 \frac{4\pi}{3} n_e \lambda_D^3} \simeq \frac{1}{\Lambda_c} \tag{11}$$

$$\therefore (9), (11) \implies \frac{\lambda_D}{\lambda_e} \simeq \Gamma^{3/2} \tag{12}$$

4-3.

以上の結果から弱結合プラズマにおける Debye shielding は無衝突プラズマの現象であり、非常に多数の電子が協調的に関与している事を示す。

弱結合プラズマの時、 $\Gamma \ll 1$ である。これと (12) 式より $\lambda_D/\lambda_e \ll 1$ である。Debye length くらいのスケールの物理現象を扱うときには、mean free path が十分大きいので衝突の効果は考えなくてよい。粒子間の衝突は無視できるが、多数の粒子によって集団的な効果が現れているようなプラズマを無衝突プラズマと呼ぶ。また (9) 式より $\Gamma \ll 1$ のとき $\Lambda_c \gg 1$ なので、弱結合プラズマ中の Debye shielding は非常に多数の電子によって担われていることがわかる。

[5] プラズマ振動

+e に帯電したイオンの海を考える。イオンは密度 n_i で一様に分布している。そこに自由に動き回れる電荷-e の電子が一様に分布しており、全体で電気的中性を保っている ($n_i = n_e$)。イオンは電子に比べて質量が圧倒的に大きいので完成が大きく、ほとんど動かないで静止していると考えてよい。

5-1.

何らかの理由で突然、電子の分布が全体で fig4 のようにズレたとする。このときの領域 A での電場を求めよう。非常に広い領域でこのようなことが起こったとすると、これは片側が +e、もう片側が -e に帯電した、いわゆる無限に平板コンデンサと同じである。イオン・電子の数面密度は $n_e \delta x = n_i \delta x$ 。よって

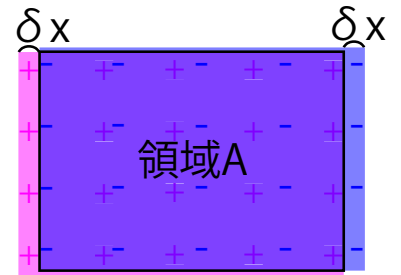


fig 4: 電子が突然ズレた様子。

$$\mathbf{E} = 4\pi n_i e \delta x \mathbf{e}_x = 4\pi n_e e \delta x \mathbf{e}_x \quad (13)$$

5-2.

領域 A 内部の電子の運動方程式をたてよう。(13) 式より

$$m_e \frac{d^2}{dt^2} \delta x = -4\pi n_e e^2 \delta x \iff \ddot{\delta x} = -\omega_{pe}^2 \delta x \implies \delta x = C_1 e^{i\omega_{pe} t} + C_2 e^{-i\omega_{pe} t} \quad (14)$$

ここで

$$\nu_{pe} = \frac{\omega_{pe}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\pi m_e}} = \left(\underbrace{\frac{e^2}{\hbar c}}_{= \frac{1}{137}} \underbrace{c^2}_{0.5 \text{ MeV}} \underbrace{\frac{\hbar c}{m_e c^2}}_{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}} \right)^{1/2} \left(\frac{n_e}{1 \text{ cm}^{-3}} \right)^{1/2} \simeq 9.3 \times 10^3 \left(\frac{n_e}{1 \text{ cm}^{-3}} \right)^{1/2} \text{ (s}^{-1}\text{)} \quad (15)$$

をプラズマ振動数という。領域 A 内の電子は角振動数 ω_{pe} の単振動をする。

[6] プラズマ中を伝播する電磁波

温度が 0K のプラズマ中を伝播する直線偏光電磁波について考えよう。電子とイオンの電荷密度が等しく至る所で n で、全電荷密度は常に 0 である (charge neutrality condition が成り立っている) とし、イオンは静止しているとする。電磁波の電場、磁場及び電磁波によって引き起こされる電子の速度は

$$\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{v} \propto e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (16)$$

のように書けるとする。以下、電子の速度は常に非相対論的として扱う。

6-1.

Maxwell 方程式から $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{v}, \mathbf{k}$ の関係式を導こう。Maxwell 方程式は以下のようなものであった。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho = 0 \quad (17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (18)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (19)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (20)$$

ここで

$$\mathbf{j} = -en\mathbf{v} \quad (21)$$

は current density である。

$$(16) \implies \nabla \cdot \mathbf{E} = \partial_i (E_{0i} e^{-i(\omega t - k_j r_j)}) = E_{0i} i k_j \underbrace{(\partial_i r_j)}_{=\delta_{ij}} e^{-i(\omega t - k_j r_j)} = i k_i E_{0i} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = i \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} \quad (22)$$

$$(16) \implies (\nabla \times \mathbf{E})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j (E_{0k} e^{-i(\omega t - k_l r_l)}) = \epsilon_{ijk} E_{0k} i k_l \underbrace{(\partial_j r_l)}_{=\delta_{jl}} e^{-i(\omega t - k_l r_l)} = i \epsilon_{ijk} k_j E_{0k} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = i (\mathbf{k} \times \mathbf{E})_i \quad (23)$$

B についても同様の式をたてることができる。(16) ~ (23) 式より

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = i \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = i \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (25)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i \mathbf{k} \times \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{B} \quad (26)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = i \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\frac{4\pi en}{c} \mathbf{v} - i \frac{\omega}{c} \mathbf{E} \quad (27)$$

が成り立つ。

6-2.

ここで、電子の運動方程式を考えよう。ただし非相対論的なので Lorentz 力を無視する。

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} \implies -i\omega m_e \mathbf{v} = -e\mathbf{E} \iff \mathbf{v} = \frac{e}{i\omega m_e} \mathbf{E} \quad (28)$$

6-3.

ここまで得た結果を用いて B, v を消去し、一つの式にまとめる。

$$(27), (28) \implies i\mathbf{k} \times \mathbf{B} = \left(i \underbrace{\frac{4\pi e^2 n}{m_e}}_{=\omega_{pe}^2} \frac{1}{\omega c} - i \frac{\omega}{c} \right) \mathbf{E} = i \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega c} - \frac{\omega}{c} \right) \mathbf{E} \quad (29)$$

$$(26) \implies \mathbf{B} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (30)$$

$$(29), (30) \implies i \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = i \frac{c}{\omega} \left(\underbrace{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})}_{(24) \text{ より } 0} \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{E} \right) = -i \frac{ck^2}{\omega} \mathbf{E} = i \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega c} - \frac{\omega}{c} \right) \mathbf{E}$$

$$\therefore \left(\frac{c}{\omega} k^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega c} - \frac{\omega}{c} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (31)$$

6-4.

$\mathbf{E} \neq 0$ より (31) 式が恒等的に成り立つためには

$$\frac{c}{\omega} k^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega c} - \frac{\omega}{c} = 0 \iff \omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k^2 \quad (32)$$

である。

6-5.

(32) より、この系を伝播する電磁波の位相速度を求めよう。

$$v_p^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \underset{c=\omega k}{=} c^2 \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right) \implies v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^2}} = \frac{c}{n} \quad (33)$$

(33) 式より、プラズマは屈折率 $n = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^2}$ の媒質ととらえることができる。 $\omega > \omega_{pe}$ のとき、 $n > 1$ よりプラズマは位相速度が光速を超える媒質である。また途中式からも $k \rightarrow 0$ のとき同様に光速を超える。これは「相対論の光速不変の原理を破っているのではないか」と思うかもしれないが、そうではない。fig5 を見てもらおう。粒子たちが波打つように運動することによって波が形成され伝播して行くように見える、だがこのとき粒子1と粒子2は何んのやり取りもしていない。「せーので、一緒に同じ方向に動こうぜ」と(光速を越えて)瞬間的に合図を送り合ったわけではなく、たまたま一緒に動き出したがために、波が形成されたに過ぎないのである。難しい言い方をすれば、位相速度は情報を伝えるものではない、ということを理解してもらいたい。

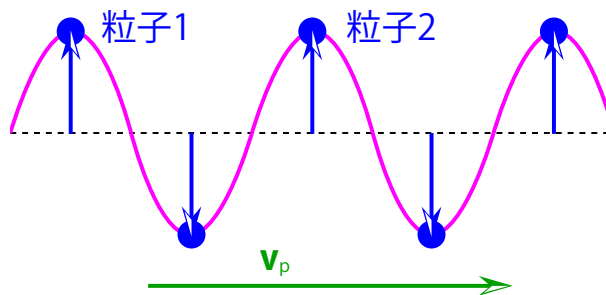


fig 5: 位相速度の概念図。

一方、 $\omega < \omega_{pe}$ のとき

$$(33) \implies k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^2} = i \frac{\omega}{c} \sqrt{\left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^2 - 1} \quad (34)$$

で虚数となる。さらに $\omega \ll \omega_{pe}$ のときは

$$(34) \implies k \simeq i \frac{\omega_{pe}}{c} \quad (35)$$

となる。(35) 式の $\frac{c}{\omega_{pe}}$ を進入長 (penetration length) という。

[7] 電磁波の複素数表示と右・左回り円偏光の偏光ベクトル

電磁波の複素数表示を考えよう。fig6のように偏光ベクトル ϵ_1, ϵ_2 を定義する。これらは互いに直交する単位ベクトル ($\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 = 0$) である。また \mathbf{n} は電磁波の進行方向の単位ベクトルである。実数部が実際の成分を表すと約束し、電場成分を

$$\mathbf{E} = a_1 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta_1)} \epsilon_1 + a_2 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta_2)} \epsilon_2 = (a_1 \epsilon_1 + a_2 e^{-i\delta} \epsilon_2) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta_1)} \quad (36)$$

$$\delta \equiv \delta_2 - \delta_1 \quad (37)$$

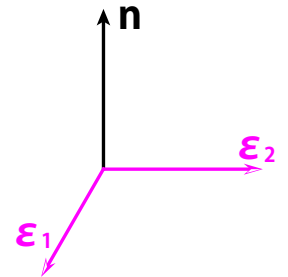


fig 6: $\mathbf{n}, \epsilon_1, \epsilon_2$ の関係。

のように書く。ただし、 a_1, a_2 は実数である。

7-1.

(36) 式の時、電場の振幅の2乗が $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$ で計算できることを示す。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* &= (a_1 \epsilon_1 + a_2 e^{-i\delta} \epsilon_2) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta_1)} \cdot (a_1 \epsilon_1 + a_2 e^{i\delta} \epsilon_2) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta_1)} = (a_1 \epsilon_1 + a_2 e^{-i\delta} \epsilon_2) \cdot (a_1 \epsilon_1 + a_2 e^{i\delta} \epsilon_2) \\ &= a_1^2 + a_2^2 \end{aligned} \quad (38)$$

実際、(36) 式の実部は

$$\Re \mathbf{E} = a_1 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta_1) \epsilon_1 + a_2 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta_2) \epsilon_2 \quad (39)$$

よりストークスパラメータは $I = a_1^2 + a_2^2$ である。よって題意が示された。

7-2.

円偏光の時、

$$a_1 = a_2 = E_0 \quad (40)$$

である。右回り円偏光 ($\delta = \frac{\pi}{2}$) のときと左回り円偏光 ($\delta = -\frac{\pi}{2}$) のとき、電場ベクトル (36) 式がどう書けるかを考えよう。まずは右回り円偏光。

$$(36) \implies \mathbf{E} = E_0 (\epsilon_1 + e^{-i\frac{\pi}{2}} \epsilon_2) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta_1)} = E_0 (\epsilon_1 - i \epsilon_2) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta_1)} = \sqrt{2} E_0 \epsilon_- e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta_1)} \quad (41)$$

ここで、

$$\epsilon_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_1 - i\epsilon_2) \quad (42)$$

である。続いて左回り円偏光のとき。

$$(36) \implies \mathbf{E} = E_0(\epsilon_1 + e^{i\frac{\pi}{2}}\epsilon_2)e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \delta_1)} = E_0(\epsilon_1 + i\epsilon_2)e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \delta_1)} = \sqrt{2}E_0\epsilon_+e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \delta_1)} \quad (43)$$

同様に

$$\epsilon_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_1 + i\epsilon_2) \quad (44)$$

と定義した。ここで ϵ_+ はヘリシティーが正、 ϵ_- はヘリシティーが負の円偏光の偏光ベクトルである。

7-3.

(42), (44) 式の定義と fig6 を用いて計算する。

$$\epsilon_+ \cdot \epsilon_+^* = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + i\epsilon_2) \cdot (\epsilon_1 - i\epsilon_2) = \frac{1}{2}(\epsilon_1^2 - i^2\epsilon_2^2) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 \quad (45)$$

$$\epsilon_- \cdot \epsilon_-^* = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - i\epsilon_2) \cdot (\epsilon_1 + i\epsilon_2) = \frac{1}{2}(\epsilon_1^2 - i^2\epsilon_2^2) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 \quad (46)$$

$$\mathbf{n} \times \epsilon_+^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n} \times \epsilon_1 - i\mathbf{n} \times \epsilon_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_2 - i(-\epsilon_1)) = \frac{i}{\sqrt{2}}(\epsilon_1 - i\epsilon_2) = i\epsilon_- = i\epsilon_+^* \quad (47)$$

$$\epsilon_+ \cdot \epsilon_-^* = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + i\epsilon_2) \cdot (\epsilon_1 + i\epsilon_2) = \frac{1}{2}(\epsilon_1^2 + 2i\underbrace{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}_0 + i^2\epsilon_2^2) = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0 \quad (48)$$

$$\epsilon_- \cdot \epsilon_+^* = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - i\epsilon_2) \cdot (\epsilon_1 - i\epsilon_2) = \frac{1}{2}(\epsilon_1^2 - 2i\underbrace{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}_0 + i^2\epsilon_2^2) = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0 \quad (49)$$

$$\mathbf{n} \times \epsilon_-^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n} \times \epsilon_1 + i\mathbf{n} \times \epsilon_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_2 + i(-\epsilon_1)) = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\epsilon_1 + i\epsilon_2) = -i\epsilon_+ = -i\epsilon_-^* \quad (50)$$

7-4.

任意の電磁波の電場成分は2つの直交する直線偏光の重ね合わせとして(36)式の様に見える。コレを書き換えて右回り、左回り円偏光電磁波の重ね合わせで書くことを目指そう。天下りのではあるが、

$$\mathbf{E} = (E_+\epsilon_+ + E_-\epsilon_-)e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \quad (51)$$

に(42), (44)式を代入して(36)式と係数比較することで E_+, E_- を求める。

$$\mathbf{E} = \left(\frac{E_+}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\epsilon}_1 + i\boldsymbol{\epsilon}_2) + \frac{E_-}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\epsilon}_1 - i\boldsymbol{\epsilon}_2) \right) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(E_+ + E_-)\boldsymbol{\epsilon}_1 + \frac{i}{\sqrt{2}}(E_+ - E_-)\boldsymbol{\epsilon}_2 \right) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (52)$$

これと (36) 式とを比較すると

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(E_+ + E_-) = a_1 e^{-i\delta_1} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(E_+ - E_-) = a_2 e^{-i\delta_2} \end{cases} \iff \begin{cases} E_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 e^{-i\delta_1} - i a_2 e^{-i\delta_2}) \\ E_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 e^{-i\delta_1} + i a_2 e^{-i\delta_2}) \end{cases} \quad (53)$$

よって (53) 式のように E_+, E_- を取ることで任意の電磁波を円偏光の重ね合わせで表現することが出来る。

7-5.

$\boldsymbol{\epsilon}_1$ 方向に直線偏光した電磁波を右回り、左回りの 2 つの円偏光の重ね合わせで表現しよう。(53) 式より $\boldsymbol{\epsilon}_1$ 方向に直線偏光した電磁波では

$$a_2 = 0 \implies \frac{i}{\sqrt{2}}(E_+ - E_-) = 0 \iff E_+ = E_- \equiv E_0 \quad (54)$$

であるから

$$(51) \implies \mathbf{E} = E_0(\boldsymbol{\epsilon}_+ + \boldsymbol{\epsilon}_-)e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (55)$$

と書ける。

[8] 一様磁場中での荷電粒子の運動

z 軸方向を向いた一様磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ の下で質量 m , 電荷 q の粒子の運動を考えよう。

8-1, 8-2.

運動方程式を考え、初速度が $\mathbf{v} = (0, v_0, 0)$ の粒子の軌跡を求めよう。運動方程式

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \quad (56)$$

を成分ごとに書くと以下ようになる。

$$m \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{q}{c} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} \iff \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{q}{mc} \begin{pmatrix} v_y B_0 \\ -v_x B_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (57)$$

力技で解いても良いが、ここでは $Z = v_x + i v_y$ なる複素数を導入して解こう。(57) 式の x, y 成分より

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{dv_x}{dt} + i \frac{dv_y}{dt} = \frac{q B_0}{mc} (v_y - i v_x) = -i \omega_c Z \implies Z = C_1 e^{-i \omega_c t} \quad (C_1 \text{ は定数}) \quad (58)$$

ここで

$$\omega_c \equiv \frac{qB_0}{mc} \quad (59)$$

はサイクロトロン振動数である。初期条件より

$$0 + iv_0 = Z(t=0) = C_1 \implies C_1 = iv_0 \quad (60)$$

$$\therefore Z = v_x + iv_y = v_0 \sin \omega_c t + iv_0 \cos \omega_c t \implies \begin{cases} v_x = v_0 \sin \omega_c t \\ v_y = v_0 \cos \omega_c t \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{v_0}{\omega_c} \cos \omega_c t + C_2 \\ y = \frac{v_0}{\omega_c} \sin \omega_c t + C_3 \end{cases} \quad (61)$$

C_2, C_3 はともに定数。また z 方向の運動は (57) 式より力が働いていないので等速直線運動をする。さらに初期の z 方向の速度がないので、この粒子は z 方向には動かない。よってこの粒子は z が一定の面内を半径 $v_0/\omega_c (= r_L, \text{Larmor radius})$ の円運動をする。

8-3.

粒子の回転によって生じる電流は一樣磁場を増やすはたらきをするか、減らすはたらきをするか、考察しよう。電荷の正負で場合分けして考える。

(i) $q > 0$ のとき、(59), (61) 式よりこの電荷は時計回りに円運動をする。この電荷の運動により生じる円電流も時計回りである。この電流により新たに生じる磁場は Biot-Savart の法則より z 軸負の向きとわかるから、確かに電荷は磁場を打ち消す方向に運動している。

(ii) $q < 0$ のとき、(59), (61) 式よりこの電荷は反時計回りに円運動をする。この電荷の運動により生じる円電流は、電荷が負なので時計回りである。この電流により新たに生じる磁場も先ほどと同様に z 軸負の向きとなるから、こちらでも同様の結論に至る。

8-4.

電子のとき、(59) 式より

$$\begin{aligned} \omega_{ce} &= \frac{eB_0}{m_e c} \simeq \underbrace{\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^{1/2}}_{=(\frac{1}{137})^{1/2}} \underbrace{(\hbar c)^{1/2}}_{(197 \text{ MeV} \cdot \text{fm})^{1/2}} \underbrace{\frac{c}{m_e c^2}}_{0.511 \text{ MeV}} B_0 \simeq \left(\frac{200}{140}\right)^{1/2} \frac{(1 \text{ fm})^{1/2} \times 3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}}{(0.5 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 10^7 \text{ erg})^{1/2}} B_0 \\ &\simeq 1.9 \times 10^7 B_0 \text{ (s}^{-1}\text{)} \end{aligned} \quad (62)$$

よって $B_0 = 1 \mu\text{G}$ のとき、 $\omega_{ce} \sim 19(\text{s}^{-1})$ である。

[9] 電子の自己エネルギーと古典電子半径

原点に静止する電子が作る自己電場の全エネルギーを算出しよう。電子は半径 r_0 の球とし、 $r < r_0$ では電荷分布が一樣で全電荷が e であるとする Gauss 則より

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (63)$$

この式の両辺を中心が原点、半径 r の球で体積積分すると

$$\iiint_{\text{半径 } r \text{ 球}} \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \iint_{\text{半径 } r \text{ 球面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \iiint_{\text{半径 } r \text{ 球}} \rho dV = \begin{cases} 4\pi e & (r > r_0) \\ 4\pi \frac{3e}{4\pi r_0^3} \frac{4\pi}{3} r^3 & (r < r_0) \end{cases} \quad (64)$$

系は球対称なので、半径 r 球面上において電場の大きさは一定である。面積積分が簡単になり、

$$4\pi r^2 E_r = \begin{cases} 4\pi e & (r > r_0) \\ 4\pi \frac{e}{r_0^3} r^3 & (r < r_0) \end{cases} \implies \mathbf{E}(r) = \begin{cases} \frac{e}{r^2} \mathbf{e}_r & (r > r_0) \\ \frac{e}{r_0^3} r \mathbf{e}_r & (r < r_0) \end{cases} \quad (65)$$

またこの系には磁場は存在していない。よって電磁場のエネルギー密度は

$$u(r) = \frac{1}{8\pi} E(r)^2 = \begin{cases} \frac{e^2}{8\pi r^4} & (r > r_0) \\ \frac{e^2}{8\pi r_0^6} r^2 & (r < r_0) \end{cases} \quad (66)$$

と求まる。電子による自己電場の全エネルギーはこれを全領域に渡って体積積分すればよく、

$$\begin{aligned} U &= \iiint_{-\infty}^{\infty} u(r) dV = 4\pi \int_0^{\infty} r^2 u(r) dr = 4\pi \left[\frac{e^2}{8\pi r_0^6} \int_0^{r_0} r^4 dr + \frac{e^2}{8\pi} \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr \right] = \frac{e^2}{2} \left[\frac{1}{5r_0^6} r^5 \Big|_0^{r_0} - \frac{1}{r} \Big|_{r_0}^{\infty} \right] \\ &= \frac{e^2}{2} \left[\frac{1}{5r_0} + \frac{1}{r_0} \right] = \frac{e^2}{2} \frac{6r_0}{5r_0} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0} \end{aligned} \quad (67)$$

また求めた全自己電場エネルギーが電子の静止質量エネルギーと等しいとして、電子の半径 r_0 を求めてみよう。

$$(67) \implies m_e c^2 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0} \iff r_0 = \frac{3e^2}{5m_e c^2} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{\underbrace{\hbar c}_{197\text{MeV fm}}} \frac{\underbrace{\hbar c}_{0.5\text{MeV}}}{m_e c^2} \sim \frac{3}{5} \frac{200}{140 \times 0.5} (\text{fm}) = \frac{12}{7} (\text{fm}) \sim 1.7 (\text{fm}) \quad (68)$$

(68) 式の半径は古典電子半径と呼ばれる。原子核の大きさが $\sim 1\text{fm}$ 程度なので、この値はかなり大きい。