

[1] radiation back reaction

質量 m_e 、電荷 $-e$ の電子が

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x \quad (1)$$

に従って運動している。以下電子の運動は $\dot{x} \ll c$ 、すなわち非相対論的極限で扱えるとする。

1-1.

$t = 0$ で $x = x_0, \dot{x} = 0$ を満たす解を求める。

$$(1) \implies x = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \quad (2)$$

$$(2) \implies \dot{x} = i\omega_0(C_1 e^{i\omega_0 t} - C_2 e^{-i\omega_0 t}) \quad (3)$$

初期条件より

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x_0 \\ i\omega_0(C_1 - C_2) = 0 \end{cases} \iff C_1 = C_2 = \frac{x_0}{2} \quad (4)$$

$$\therefore (2), (3), (4) \implies \begin{cases} x = \frac{x_0}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) = x_0 \cos \omega_0 t \\ \dot{x} = i\omega_0 \frac{x_0}{2}(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) = -\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t \end{cases} \quad (5)$$

この系の全力学的エネルギーは (5) 式より

$$E = T + U = \underbrace{\frac{1}{2} m_e \dot{x}^2}_{\text{運動エネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_e \omega_0^2 x^2}_{\text{ポテンシャルエネルギー}} = \frac{1}{2} m_e \omega_0^2 x_0^2 \sin^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} m_e \omega_0^2 x_0^2 \cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} m_e \omega_0^2 x_0^2 \quad (6)$$

1-2.

荷電粒子が加速度運動をすると、輻射を放出して力学的エネルギーを失う。電子の運動が非相対論的なので、輻射強度は Larmor の式から

$$P = \frac{2e^2 \ddot{x}^2}{3c^3} \quad (7)$$

$$\therefore (1), (5), (7) \implies P = \frac{2e^2}{3c^3} \omega_0^4 x^2 = \frac{2e^2 \omega_0^4 x_0^2}{3c^3} \cos^2 \omega_0 t = \frac{e^2 \omega_0^4 x_0^2}{3c^3} (1 + \cos 2\omega_0 t) \quad (8)$$

一周期の平均は

$$\langle P \rangle = \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)} \int_0^{2\pi/\omega_0} \frac{e^2 \omega_0^4 x_0^2}{3c^3} (1 + \underbrace{\cos 2\omega_0 t}_{\text{積分値は0}}) dt = \frac{e^2 \omega_0^4 x_0^2}{3c^3} \quad (9)$$

1-3.

輻射を出すことにより電子が全力的エネルギーを失うのにかかる時間は (6), (9) 式より

$$t_{\text{rad}} = \frac{E}{\langle P \rangle} = \frac{3m_e c^3}{2e^2 \omega_0^2} = \frac{1}{\tau \omega_0^2} \quad (10)$$

ここで

$$\tau \equiv \frac{2e^2}{3m_e c^3} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\overbrace{\hbar c}^{197\text{MeV}\cdot\text{fm}}}{\underbrace{m_e c^2}_{1/137} \cdot c} \sim \frac{2}{3} \frac{1}{140} \frac{200\text{MeV}\cdot\text{fm}}{0.5\text{MeV} \times 3 \times 10^{10}\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}} \sim 6.6 \times 10^{-24} \text{ (s)} \quad (11)$$

である。 $\tau \omega_0 = 1$ となる振動数を求めると

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau} \sim \frac{3}{2} \times 10^{23} \text{ (s}^{-1}\text{)} \implies \nu_0 \sim \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{3}{4\pi} \times 10^{23} \text{ (s}^{-1}\text{)} \sim 2.5 \times 10^{22} \text{ (s}^{-1}\text{)} \quad (12)$$

波長になおすと

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} \sim 1.2 \times 10^{-12} \text{ (cm)} \quad (13)$$

となる。ちなみに photon のエネルギーに換算すると

$$\hbar \omega_0 = \hbar c \frac{\omega_0}{c} \sim 200\text{MeV}\cdot\text{fm} \frac{\frac{3}{2} \times 10^{23}\text{s}^{-1}}{3 \times 10^{23}\text{fm}\cdot\text{s}^{-1}} \sim 100\text{MeV} \quad (14)$$

H の基底状態のエネルギーが -13.6eV , SNR などの代表的な X 線観測源である Fe の完全電離エネルギーが -10keV なのでこの値はかなり大きい。よって自然界においては $\tau \omega_0 \ll 1$ と考えてよいだろう。

1-4.

ここで扱っている単振動のモデルは、原子の束縛電子がエネルギー準位を遷移しエネルギー $\hbar \omega_0$ の photon を放出する過程の古典的 model と考えることができる。ほとんどの原子では束縛電子の遷移による放射においては $\omega_0 \tau \ll 1$ が成り立っている。よって、振動の一周期間での輻射の放出によるエネルギー損失は無視できるほど小さく、「輻射放出による電子のエネルギー損失率は角振動数 ω_0 で単振動しているとして求めた輻射放出によるエネルギー放出率で一定である」という第 0 近似で物事を進めていこう。この考えに基づき、原子の束縛電子が輻射を放出してエネルギー準位を遷移する過程を古典的な運動方程式

$$\ddot{x} = -\frac{\dot{x}}{t_{\text{rad}}} - \omega_0^2 x = -\tau \omega_0^2 \dot{x} - \omega_0^2 x \quad (15)$$

で表してしまうことにする。ここで輻射によるエネルギー損失を速度に比例する形で書いた。この式を解いて電子の振る舞いを考えてみよう。この形の式を見たときには、解を $e^{\lambda t}$ の形で求めてみるというのが常套手段であった。

$$(15) \implies \lambda^2 e^{\lambda t} = -\tau\omega_0^2 \lambda e^{\lambda t} - \omega_0^2 e^{\lambda t} \iff \lambda^2 + \tau\omega_0^2 \lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (16)$$

2次方程式の解の公式より

$$\lambda = \frac{-\tau\omega_0^2 \pm \sqrt{\tau^2\omega_0^4 - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 \pm \frac{1}{2}\omega_0 \sqrt{\tau^2\omega_0^2 - 4} \underset{\tau\omega_0 \ll 1}{\simeq} -\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 \pm i\omega_0 \quad (17)$$

よって (15) 式の一般解は

$$x = C_3 \exp\left\{-\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 + i\omega_0\right\}t + C_4 \exp\left\{-\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 - i\omega_0\right\}t = e^{-\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 t} (C_3 e^{i\omega_0 t} + C_4 e^{-i\omega_0 t}) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(-\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 + i\omega_0\right)C_3 \exp\left\{-\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 + i\omega_0\right\}t + \left(-\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 - i\omega_0\right)C_4 \exp\left\{-\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 - i\omega_0\right\}t \\ &= e^{-\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 t} \left\{\left(-\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 + i\omega_0\right)C_3 e^{i\omega_0 t} + \left(-\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 - i\omega_0\right)C_4 e^{-i\omega_0 t}\right\} \end{aligned} \quad (19)$$

初期条件を $x = x_0, \dot{x} = 0$ とすると

$$\begin{cases} C_3 + C_4 = x_0 \\ -\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 + i\omega_0 C_3 + \left(-\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 - i\omega_0\right)C_4 = 0 \end{cases} \iff C_3 = \frac{1}{2}\left(1 - i\frac{\omega_0\tau}{2}\right)x_0, \quad C_4 = \frac{1}{2}\left(1 + i\frac{\omega_0\tau}{2}\right)x_0 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} (18), (20) \implies x &= \frac{1}{2}x_0 e^{-\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 t} \left\{\left(1 - i\frac{\omega_0\tau}{2}\right)e^{i\omega_0 t} + \left(1 + i\frac{\omega_0\tau}{2}\right)e^{-i\omega_0 t}\right\} = \frac{1}{2}x_0 e^{-\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 t} \left(2 \cos \omega_0 t + \underbrace{\omega_0\tau}_{\ll 1} \sin \omega_0 t\right) \\ &\simeq x_0 e^{-\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 t} \cos \omega_0 t \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} (19), (20) \implies \dot{x} &= \frac{1}{2}i\omega_0 e^{-\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 t} \left\{\left(i\frac{\tau\omega_0}{2} + 1\right)\left(1 - i\frac{\omega_0\tau}{2}\right)x_0 e^{i\omega_0 t} + \left(\frac{\tau\omega_0}{2} - 1\right)\left(1 + i\frac{\omega_0\tau}{2}\right)x_0 e^{-i\omega_0 t}\right\} \\ &= \frac{1}{2}i\omega_0 e^{-\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 t} \left\{\left(1 - \left(i\frac{\omega_0\tau}{2}\right)^2\right)x_0 e^{i\omega_0 t} - \left(1 - \left(i\frac{\omega_0\tau}{2}\right)^2\right)x_0 e^{-i\omega_0 t}\right\} \\ &= \frac{1}{2}i\omega_0 e^{-\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 t} \left(1 + \frac{\omega_0^2\tau^2}{4}\right)x_0 2i \sin \omega_0 t = -\omega_0 x_0 \left(1 + \underbrace{\frac{\omega_0^2\tau^2}{4}}_{\ll 1}\right) e^{-\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 t} \sin \omega_0 t \\ &\simeq -\omega_0 x_0 e^{-\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 t} \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (22)$$

$$\therefore E = \frac{1}{2}m_e \dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_e \omega_0^2 x^2 = \frac{1}{2}m_e \omega_0^2 x_0^2 e^{-\tau\omega_0^2 t} \sin^2 \omega_0 t + \frac{1}{2}m_e \omega_0^2 x_0^2 e^{-\tau\omega_0^2 t} \cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{2}m_e \omega_0^2 x_0^2 e^{-\tau\omega_0^2 t} \quad (23)$$

$t = t_{\text{rad}} = 1/(\tau\omega_0^2)$ のとき

$$E(t_{\text{rad}}) = \frac{1}{2}m_e \omega_0^2 x_0^2 e^{-1} = E(0)e^{-1} \quad (24)$$

求まった解 (21) 式を Fourier 変換し、スペクトルを求めてみよう。

$$\begin{aligned}\hat{x}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} x_0 e^{-\frac{1}{2}\tau\omega_0 t} \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} dt = \frac{x_0}{4\pi} \int_0^{\infty} (e^{i(\omega+\omega_0)t - \frac{1}{2}\tau\omega_0 t} + e^{i(\omega-\omega_0)t - \frac{1}{2}\tau\omega_0 t}) dt \\ &= \frac{x_0}{4\pi} \left(\frac{1}{i(\omega+\omega_0) - \frac{1}{2}\tau\omega_0} + \frac{1}{i(\omega-\omega_0) - \frac{1}{2}\tau\omega_0} \right) \equiv \frac{x_0}{4\pi} \hat{X}(\omega)\end{aligned}\quad (25)$$

$\Gamma \equiv \tau\omega_0 \ll 1$ と置くと

$$\begin{aligned}\hat{X}(\omega) &= \frac{-\frac{1}{2}\Gamma - i(\omega+\omega_0)}{\{-\frac{1}{2}\Gamma + i(\omega+\omega_0)\} \{-\frac{1}{2}\Gamma - i(\omega+\omega_0)\}} + \frac{-\frac{1}{2}\Gamma - i(\omega-\omega_0)}{\{-\frac{1}{2}\Gamma + i(\omega-\omega_0)\} \{-\frac{1}{2}\Gamma - i(\omega-\omega_0)\}} \\ &= \left(\frac{1}{\frac{\Gamma^2}{4} + (\omega+\omega_0)^2} + \frac{1}{\frac{\Gamma^2}{4} + (\omega-\omega_0)^2} \right) \left(-\frac{1}{2}\Gamma \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{\frac{\Gamma^2}{4} + (\omega+\omega_0)^2} + \frac{1}{\frac{\Gamma^2}{4} + (\omega-\omega_0)^2} \right) (-i\omega) + \left(\frac{1}{\frac{\Gamma^2}{4} + (\omega+\omega_0)^2} - \frac{1}{\frac{\Gamma^2}{4} + (\omega-\omega_0)^2} \right) (-i\omega_0) \\ &= -\frac{1}{2}\Gamma \left(\frac{\frac{\Gamma^2}{2} + 2(\omega^2 + \omega_0^2)}{\left\{ \frac{\Gamma^2}{4} + (\omega+\omega_0)^2 \right\} \left\{ \frac{\Gamma^2}{4} + (\omega-\omega_0)^2 \right\}} \right) \\ &\quad - i \left[\omega \frac{\frac{\Gamma^2}{2} + 2(\omega^2 + \omega_0^2)}{\left\{ \frac{\Gamma^2}{4} + (\omega+\omega_0)^2 \right\} \left\{ \frac{\Gamma^2}{4} + (\omega-\omega_0)^2 \right\}} + \omega_0 \frac{-4\omega\omega_0}{\left\{ \frac{\Gamma^2}{4} + (\omega+\omega_0)^2 \right\} \left\{ \frac{\Gamma^2}{4} + (\omega-\omega_0)^2 \right\}} \right] \\ &\stackrel{\Gamma \ll 1}{\approx} -\frac{1}{2}\Gamma \left(\frac{2(\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega+\omega_0)^2(\omega-\omega_0)^2} \right) - i \left[\omega \frac{2(\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega+\omega_0)^2(\omega-\omega_0)^2} + \omega_0 \frac{-4\omega\omega_0}{(\omega+\omega_0)^2(\omega-\omega_0)^2} \right] \\ \Rightarrow |\hat{X}(\omega)|^2 &= \frac{\Gamma^2}{4} \left(\frac{2(\omega+\omega_0)^2}{(\omega+\omega_0)^2(\omega-\omega_0)^2} \right)^2 + \left[\omega \frac{2(\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega+\omega_0)^2(\omega-\omega_0)^2} + \omega_0 \frac{-4\omega\omega_0}{(\omega+\omega_0)^2(\omega-\omega_0)^2} \right]^2 \\ &\stackrel{\Gamma \ll 1}{\approx} \left[\omega \frac{2(\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega+\omega_0)^2(\omega-\omega_0)^2} + \omega_0 \frac{-4\omega\omega_0}{(\omega+\omega_0)^2(\omega-\omega_0)^2} \right]^2 = \left(\frac{2\omega(\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega+\omega_0)^2(\omega-\omega_0)^2} \right)^2 \\ &= \frac{4\omega^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^4} = \frac{4\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}\end{aligned}\quad (26)$$

$$\therefore (25), (26) \Rightarrow |x(\omega)|^2 = \frac{x_0^2}{16\pi^2} \frac{4\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}\quad (27)$$

求めたい輻射エネルギーのスペクトルは Larmor の公式を用いて

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{8\pi\omega^4}{3c^3} |\hat{d}(\omega)|^2 = \frac{8\pi\omega^4}{3c^3} |e\hat{x}(\omega)|^2 \stackrel{(27)}{=} \frac{2e^2 x_0^2}{3\pi c^3} \frac{\omega^6}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}\quad (28)$$

[2] 電子による円偏光電磁波の散乱および無偏光電磁波の散乱

左廻りに円偏光した角周波数 ω_0 の電磁波が自由電子にぶつかった。電磁波は z 軸正方向に進むとし、電子は $z = 0$ 平面内にいるとする。また、電子の運動は非相対論的に限る。

2-1.

電子の運動方程式は

$$m_e \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -e(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}) \simeq -e\mathbf{E} = -e \begin{pmatrix} E_0 \cos \omega_0 t \\ E_0 \sin \omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

2-2.

以下では、 z 軸となす角 θ の \mathbf{n} 方向に散乱される電磁波の微分散乱断面積を求めていく。簡単のため \mathbf{n} は yz 平面にあるとする。

a) 電磁波の入射により、電子が運動方程式に従って加速度運動する。そのため電子は電磁波を放射する。この2次波の性質を調べることで、左回り円偏光電磁波の電子による散乱の詳細を見ていこう。 x, y, z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ とする。偏光方向を表す単位ベクトルを $\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2$ とし、 $\hat{\mathbf{a}}_1 = -\mathbf{e}_x$ のようにとる。

fig1 より、 \mathbf{n} は \mathbf{e}_z を x 軸まわりに $-\theta$ 回転させたものに等しい。よって

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ 0 & \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(-\theta) \\ \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \sin \theta \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \quad (30)$$

fig1 より、 $\hat{\mathbf{a}}_2$ は \mathbf{e}_z を x 軸まわりに $\frac{\pi}{2} - \theta$ 回転させたものに等しい。よって

$$\hat{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) & -\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) \\ 0 & \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) & \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) \end{pmatrix} \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) \\ \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = -\cos \theta \mathbf{e}_y + \sin \theta \mathbf{e}_z \quad (31)$$

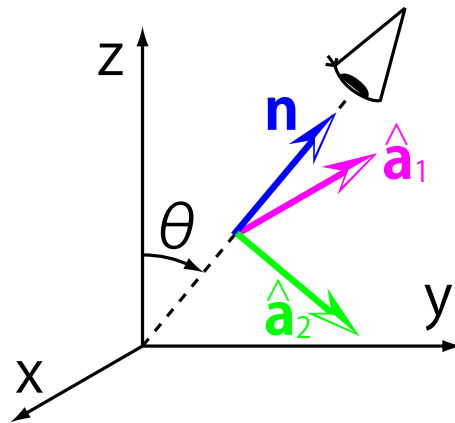


fig 1: 座標設定。

b) 散乱された電磁波の電場を求めよう。

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \left[\frac{-e}{Rc^2} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{r}}) \right] \quad (32)$$

であるが、観測者から電子までの距離 R は電子の運動による距離変化に比べて非常に大きいため、 $t_{\text{ret}} \simeq t$ として構わないとする。つまり以降の計算は

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = -\frac{e}{Rc^2} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{r}}) \quad (33)$$

とする。ベクトル解析の計算より

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{r}}) = (\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{r}})\mathbf{n} - \ddot{\mathbf{r}} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \therefore (30), (33), (34) \implies \mathbf{E}_{\text{rad}} &= -\frac{e}{Rc^2} \left\{ -\frac{eE_0}{m_e} \sin \theta \sin \omega_0 t \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} + \frac{eE_0}{m_e} \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \begin{pmatrix} -\cos \omega_0 t \\ (\sin^2 \theta - 1) \sin \omega_0 t \\ \sin \theta \cos \theta \sin \omega_0 t \end{pmatrix} = \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \begin{pmatrix} -\cos \omega_0 t \\ -\cos^2 \theta \sin \omega_0 t \\ \sin \theta \cos \theta \sin \omega_0 t \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (35)$$

$\hat{\mathbf{a}}_1 = -\mathbf{e}_x$, (31) 式より

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} (\cos \omega_0 t \hat{\mathbf{a}}_1 + \cos \theta \sin \omega_0 t \hat{\mathbf{a}}_2) \quad (36)$$

c) \mathbf{n} 方向に放射される電磁波の単位時間単位立体角あたりのエネルギー (the power per solid angle) は

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= R^2 |\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi} R^2 |\mathbf{E}_{\text{rad}}|^2 = \frac{c}{4\pi} R^2 \left(\frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \right)^2 (\cos^2 \omega_0 t \underbrace{|\hat{\mathbf{a}}_1|^2}_1 + 2 \cos \theta \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t \underbrace{\hat{\mathbf{a}}_1 \cdot \hat{\mathbf{a}}_2}_0 + \cos^2 \theta \sin^2 \omega_0 t \underbrace{|\hat{\mathbf{a}}_2|^2}_1) \\ &= \frac{e^4 E_0^2}{4\pi m_e^2 c^3} (\cos^2 \omega_0 t + \cos^2 \theta \sin^2 \omega_0 t) \end{aligned} \quad (37)$$

であり、その時間平均は

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle &= \frac{1}{\omega_0} \int_0^{2\pi/\omega_0} \frac{e^4 E_0^2}{4\pi m_e^2 c^3} (\cos^2 \omega_0 t + \cos^2 \theta \sin^2 \omega_0 t) dt \\ &= \frac{1}{\omega_0} \frac{e^4 E_0^2}{8\pi m_e^2 c^3} \int_0^{2\pi/\omega_0} \left\{ \underbrace{(1 + \cos 2\omega_0 t)}_{\text{積分値 } 0} + \cos^2 \theta \underbrace{(1 - \cos 2\omega_0 t)}_{\text{積分値 } 0} \right\} dt = \frac{e^4 E_0^2}{8\pi m_e^2 c^3} (1 + \cos^2 \theta) \end{aligned} \quad (38)$$

である。さらに \mathbf{E}_{rad} をフーリエ変換すると

$$\hat{\mathbf{E}}_{\text{rad}}(\omega) = \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 t e^{i\omega t} \hat{\mathbf{a}}_1 dt + \cos \theta \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega_0 t e^{i\omega t} \hat{\mathbf{a}}_2 dt \right) \quad (39)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 t e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i(\omega+\omega_0)t} + e^{i(\omega-\omega_0)t}) dt = \pi(\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)) \quad (40)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega_0 t e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i(\omega+\omega_0)t} - e^{i(\omega-\omega_0)t}) dt = \frac{1}{i} \pi(\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)) \quad (41)$$

$$\therefore (39), (40), (41) \implies \hat{\mathbf{E}}_{\text{rad}}(\omega) = \frac{e^2 E_0}{2m_e R c^2} \{(\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0))\hat{\mathbf{a}}_1 - i \cos \theta (\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0))\hat{\mathbf{a}}_2\}$$

$$\underbrace{=}_{\omega > 0} \frac{e^2 E_0}{2m_e R c^2} \{ \delta(\omega-\omega_0)\hat{\mathbf{a}}_1 + i \cos \theta \delta(\omega-\omega_0)\hat{\mathbf{a}}_2 \} \quad (42)$$

d)

$$(36) \implies \hat{\mathbf{a}}_1 \text{成分} \cdots \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \cos \omega_0 t, \quad \hat{\mathbf{a}}_2 \text{成分} \cdots \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \cos \theta \sin \omega_0 t \quad (43)$$

$$\sin \omega_0 t = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \omega_0 t \right) = \cos \left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right)$$

より $\hat{\mathbf{a}}_1$, $\hat{\mathbf{a}}_2$ 方向の電場の位相差は

$$\delta \equiv \delta_2 - \delta_1 = -\frac{\pi}{2} \quad (44)$$

(43), (44) 式より、Stokes parameters が求まる。

$$I_{\text{left}} = \left(\frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \right)^2 + \left(\frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \right)^2 \cos^2 \theta = \left(\frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \theta) \quad (45)$$

$$Q_{\text{left}} = \left(\frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \right)^2 - \left(\frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \right)^2 \cos^2 \theta = \left(\frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \right)^2 (1 - \cos^2 \theta) \quad (46)$$

$$U_{\text{left}} = 2 \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \cos \theta \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad (47)$$

$$V_{\text{left}} = 2 \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \cos \theta \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -2 \left(\frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \right)^2 \cos \theta \quad (48)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta = 0 & : \text{左廻り円偏光} \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} & : \text{左廻り楕円偏光} \\ \theta = \frac{\pi}{2} & : \text{直線偏光} \\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi & : \text{右廻り楕円偏光} \\ \theta = \pi & : \text{右廻り円偏光} \end{array} \right. \quad (49)$$

のようになる。わかりやすく fig??, fig3 にまとめた。偏光度は (45) ~ (48) 式より

$$\Pi_{\text{left}} = \frac{\sqrt{Q_{\text{left}}^2 + U_{\text{left}}^2 + V_{\text{left}}^2}}{I_{\text{left}}} = \frac{\sqrt{(1 - \cos^2 \theta)^2 + 4 \cos^2 \theta}}{1 + \cos^2 \theta} = 1 \quad (50)$$

で完全偏光している。

e) 入射してくる左廻り円偏光電磁波の Poynting Vector の大きさは

$$|\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E} \times \mathbf{B}| = \frac{c}{4\pi} E^2 = \frac{c}{4\pi} E_0^2 \quad (51)$$

で一様である。Poynting Vector は energy flux である。電磁波の散乱の場合の微分散乱断面積 $\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}$ を

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \langle S \rangle \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}_{\text{left}} \quad (52)$$

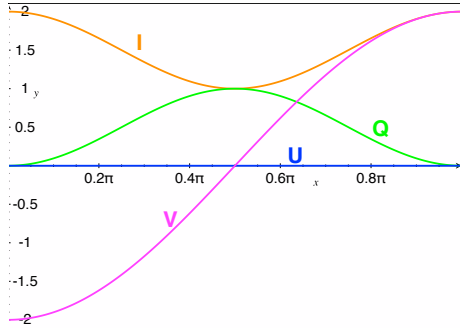


fig 2: 左回り円偏光電磁波が電子に入射したときの、2次波の Stokes parameters $\left(\frac{e^2 E_0}{m_e R c^2}\right)^2$ で規格化)。

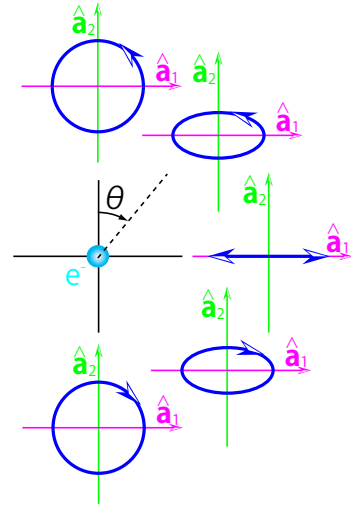


fig 3: 観測者の方向と偏光の関係。

のように定義する。つまりエネルギーフラックス S の電磁波が微小面積 $d\sigma$ にぶつかり、角度 θ の方向に散乱された、と考えるのである。(38), (51), (52) 式より

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega_{\text{left}}} = \frac{4\pi}{cE_0^2} \frac{e^4 E_0^2}{8\pi m_e^2 c^3} (1 + \cos^2 \theta) = \frac{e^4}{2m_e^2 c^4} (1 + \cos^2 \theta) \quad (53)$$

f) 左回り円偏光電磁波が入射した場合のここまでの結果を用いて、次は無偏光電磁波が入射した場合を考察する。無偏光電磁波は右回り円偏光と左回り円偏光の incoherent な重ね合わせである。また微分散乱断面積はその定義から、左回り右回りで値は変化しない。よって無偏光電磁波に対しても微分散乱断面積は (53) 式のように書ける。よって全散乱断面積は

$$\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{e^4}{2m_e^2 c^4} (1 + \cos^2 \theta) \underset{\mu = \cos\theta}{=} \frac{e^4 \pi}{m_e^2 c^4} \int_{-1}^1 d\mu \underbrace{(1 + \mu^2)}_{\text{偶関数}} = \frac{2e^4 \pi}{m_e^2 c^4} \int_0^1 d\mu (1 + \mu^2) = \frac{8e^4 \pi}{3m_e^2 c^4} = \frac{8}{3} \pi r_0^2 \quad (54)$$

$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} \sim 3\text{fm}$ は古典電子半径である。上述した通り無偏光電磁波は右回り円偏光と左回り円偏光の incoherent な重ね合わせなので、無偏光電磁波が入射したときの散乱波の偏光を調べるためには右回り円偏光電磁波が入射した場合の Stokes parameters も調べなくてはならない。しかしそれには左回りの場合の位相差 δ を $\frac{\pi}{2}$ にするだけでよい。よって右回りの場合の Stokes parameters は

$$I_{\text{right}} = \left(\frac{e^2 E_0}{m_e R c^2}\right)^2 (1 + \cos^2 \theta) \quad (55)$$

$$Q_{\text{right}} = \left(\frac{e^2 E_0}{m_e R c^2}\right)^2 (1 - \cos^2 \theta) \quad (56)$$

$$U_{\text{right}} = 2 \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \cos\theta \cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad (57)$$

$$V_{\text{right}} = 2 \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \cos\theta \sin\frac{\pi}{2} = 2 \left(\frac{e^2 E_0}{m_e R c^2}\right)^2 \cos\theta \quad (58)$$

よって無偏光電磁波の場合の Stokes parameters は (45) ~ (46), (55) ~ (56) 式より

$$I_{\text{no}} = \frac{1}{2}(I_{\text{left}} + I_{\text{right}}) = I_{\text{left}} = \left(\frac{e^2 E_0}{m_e R c^2}\right)^2 (1 + \cos^2 \theta) \quad (59)$$

$$Q_{\text{no}} = \frac{1}{2}(Q_{\text{left}} + Q_{\text{right}}) = Q_{\text{left}} = \left(\frac{e^2 E_0}{m_e R c^2} \right)^2 (1 - \cos^2 \theta) \quad (60)$$

$$U_{\text{no}} = \frac{1}{2}(U_{\text{left}} + U_{\text{right}}) = 0 \quad (61)$$

$$V_{\text{no}} = \frac{1}{2}(V_{\text{left}} + V_{\text{right}}) = 0 \quad (62)$$

どの θ に対しても $V_{\text{no}} = 0$ なので、散乱波は直線偏光電磁波しか観測されない。また $Q_{\text{no}} > 0$ 、 $U_{\text{no}} = 0$ からこの散乱電磁波は常に \hat{a}_1 方向の直線偏光となる。しかし、偏光度は (59) ~ (62) 式より

$$\Pi_{\text{no}} = \frac{\sqrt{Q_{\text{no}}^2 + U_{\text{no}}^2 + V_{\text{no}}^2}}{I_{\text{no}}} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \quad (63)$$

となり、散乱方向によっては部分偏光や無偏光になりうる。

[3] mean-free-pass

観測可能距離 = 電磁波が散乱されずに到達できる距離、である。電子の全散乱断面積 (衝突時のまとの大きさ) は前問より

$$\sigma = \frac{8e^4\pi}{3m_e^2c^4} = \frac{8\pi}{3} \underbrace{\left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2}_{1/137^2} \frac{\overbrace{(\hbar c)^2}^{197^2 \text{MeV}^2 \cdot \text{fm}^2}}{(m_e c^2)^2}_{0.511^2 \text{MeV}^2} \sim 2 \left(\frac{2 \times 200 \times 10^{-13}}{140 \times 0.5} \right)^2 \sim \left(\frac{4}{7} \right)^2 \times 2 \times 10^{-24} \sim \frac{32}{49} \times 10^{-24} \text{ (cm)} \sim \frac{2}{3} \text{ (barn)} \quad (64)$$

である。底面積が単位面積で高さが l (高さ方向に電磁波の進行方向をとる) であるような柱を考えると、その柱の中には電子が $1 \times l \times n_e$ 個いる。電子たちによって確実に電磁波が散乱されるのは柱の底面が電子によって全て埋め尽くされたときだから、

$$l n_e \sigma = 1 \iff l = \frac{1}{n_e \sigma} \quad (65)$$

これを平均自由行程 (mean-free-pass、散乱されずに進める大体の距離) という。(64), (65) 式と $n_e \sim 2 \times 10^{-7} \text{ (cm}^{-3}\text{)}$ より観測できる一番遠くの天体までの距離は

$$l = \frac{3}{2 \times 10^{-7} \times 2 \times 10^{-24}} \sim 7.5 \times 10^{30} \text{ (cm)} \sim 2.5 \times 10^{12} \text{ (pc)} = 2.5 \text{ (Tpc)} \quad (66)$$

である。

[4] eV · 温度 · 周波数 · 波長換算

$E = 1 \text{ eV} \sim 1.602 \times 10^{-12} \text{ erg}$ のとき、これを温度に換算してみよう。 $k_B \sim 1.381 \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$ より

$$T = \frac{E}{k_B} = \frac{1.602 \times 10^{-12}}{1.381 \times 10^{-16}} \sim 1.16 \times 10^4 \text{ (K)} \quad (67)$$

となる。1eV が約 10000K と覚えておけば便利である。また 1eV のエネルギーを持つ photon を電磁波と考えたときの波長及び周波数を計算しよう。

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{Ec}{2\pi \underbrace{\hbar c}_{197\text{MeV}\cdot\text{fm}}} \sim \frac{3 \times 10^{10} \text{cm s}^{-1}}{2 \times 3} \frac{1\text{eV}}{200 \times 10^6 \text{eV} \times 10^{-13} \text{cm}} \sim 2.5 \times 10^{14} \text{ (s}^{-1}\text{)} \quad (68)$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \sim \frac{3 \times 10^{10} \text{cm s}^{-1}}{2.5 \times 10^{14} \text{s}^{-1}} \sim 1.2 \times 10^{-4} \text{ (cm)} = 1.2 \text{ (\mu m)} = 1.2 \times 10^4 \text{ (\AA)} \quad (69)$$

[5] Poisson equation を満たす potential と湯川型 potential の導出

5-1.

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = -4\pi q_0 \delta^3(\mathbf{r}) \quad (70)$$

フーリエ変換を用いてこの式を解く。(70) 式の左辺の逆フーリエ変換を考えると

$$\Delta \iiint_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}} d^3\mathbf{k} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\mathbf{k}) \Delta e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}} d^3\mathbf{k} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\mathbf{k}) (-k^2) e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}} d^3\mathbf{k} \quad (71)$$

$$\therefore (70), (71) \implies \iiint_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\mathbf{k}) (-k^2) e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}} d^3\mathbf{k} = -4\pi q_0 \delta^3(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi q_0}{(2\pi)^3} \underbrace{\iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}} d^3\mathbf{k}}_{\text{delta 関数積分表示化}}$$

両辺を比較して

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{q_0}{2\pi^2} \frac{1}{k^2} \quad (72)$$

逆フーリエ変換したものが求まったのだから、これをフーリエ変換すればそれが (70) 式の解である。積分の仕方としては、 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{k} = rk \cos \theta$ となるように座標設定をするのが便利である。

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{q_0}{2\pi^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}}}{k^2} d^3\mathbf{k} \stackrel{\substack{= \\ d^3\mathbf{k}=k^2 \sin \theta dk d\theta d\varphi}}{=} \frac{q_0}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dk \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi e^{irk \cos \theta} \\ &\stackrel{\substack{= \\ \mu = \cos \theta}}{=} \frac{q_0}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_{-1}^1 d\mu e^{irk\mu} = \frac{q_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{irk} (e^{irk} - e^{-irk}) dk = \frac{2q_0}{\pi r} \int_0^{\infty} \frac{\sin rk}{k} dk \\ &\stackrel{\substack{= \\ rk=t}}{=} \frac{2q_0}{\pi r} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt}_{=\pi/2} = \frac{q_0}{r} \end{aligned} \quad (73)$$

5-2.

$$(\Delta - \mu^2)\phi(\mathbf{r}) = -4\pi q_0 \delta^3(\mathbf{r}) \quad (74)$$

解き方は 5-1 と同じ。両辺の逆フーリエ変換を考え、両辺を比較してやれば

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{q_0}{2\pi^2} \frac{1}{k^2 + \mu^2} \quad (75)$$

を得る。先ほどと同じ座標設定でフーリエ変換すれば

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{q_0}{2\pi^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}}}{k^2 + \mu^2} d^3\mathbf{k} \quad \underbrace{=}_{d^3\mathbf{k}=k^2 \sin\theta dk d\theta d\varphi} \frac{q_0}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dk \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi e^{irk \cos\theta} \frac{k^2}{k^2 + \mu^2} \sin\theta \\ &\underbrace{=}_{\nu=\cos\theta} \frac{q_0}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_{-1}^1 d\nu e^{irk\nu} \frac{k^2}{k^2 + \mu^2} = \frac{q_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k^2}{k^2 + \mu^2} \frac{1}{irk} (e^{irk} - e^{-irk}) dk \\ &= \frac{2q_0}{\pi r} \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{k \sin rk}{k^2 + \mu^2}}_{\text{偶関数}} dk = \frac{q_0}{\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k \sin rk}{k^2 + \mu^2} dk = \frac{q_0}{2i\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{k^2 + \mu^2} (e^{irk} - e^{-irk}) dk \end{aligned} \quad (76)$$

となる。

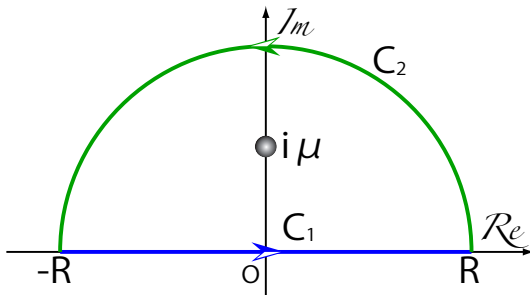


fig 4: 複素数平面上平曲路積分 1。

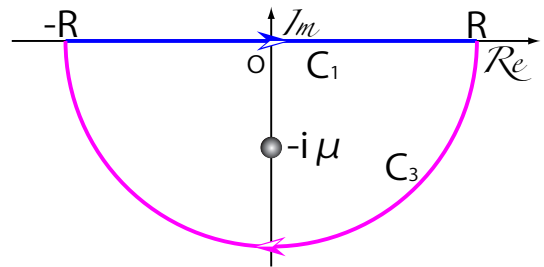


fig 5: 複素数平面上平曲路積分 2。

(76) 式を求めるために複素数平面上の平曲路 fig4 で

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + \mu^2} e^{irz} \quad (z = x + iy) \quad (77)$$

を積分する事を考えよう。

$$\begin{cases} C_1 : \text{実軸上 } -R \rightarrow R \\ C_2 : z = Re^{i\theta} (\theta : 0 \rightarrow \pi) \end{cases}$$

ただし、 $R > \mu$ とする。

留数定理より

$$\oint_{C_1+C_2} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f; i\mu) \quad (78)$$

$\text{Res}(f; i\mu)$ は $f(z)$ の $z = i\mu$ における留数 (Residue) である。

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z}{z^2 + \mu^2} e^{irz} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - i\mu} + \frac{1}{z + i\mu} \right) e^{irz} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - i\mu} + \frac{1}{z + i\mu} \right) \underbrace{\left(e^{-r\mu} + ire^{-r\mu}(z - i\mu) + (z - i\mu \text{の } 2 \text{ 次以上の項}) \right)}_{e^{irz} \text{を } z=i\mu \text{の周りで Taylor 展開した部分}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{e^{-r\mu}}{z - i\mu} + \frac{1}{2} ire^{-r\mu} + (z - i\mu \text{の } 1 \text{ 次以上の項}) + \frac{1}{2} \frac{1}{z + i\mu} e^{irz}
\end{aligned}$$

第 1 項以外は $z = i\mu$ で正則なので、

$$\text{Res}(f; i\mu) = \frac{1}{2} e^{-r\mu} \quad (79)$$

$$(78), (79) \implies \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_2} f(z) dz = i\pi e^{-r\mu} \underset{R \rightarrow \infty}{\implies} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = i\pi e^{-r\mu} - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_2} f(z) dz \quad (80)$$

C_2 上において $z = Re^{i\theta}, dz = iRe^{i\theta}$ より

$$\begin{aligned}
\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_2} f(z) dz \right| &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_0^\pi iRe^{i\theta} \frac{Re^{i\theta}}{R^2 e^{2i\theta} + \mu^2} e^{irRe^{i\theta}} d\theta \right| = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \left| \frac{R^2}{R^2 e^{2i\theta} + \mu^2} \right| |e^{irR \cos \theta} e^{-rR \sin \theta}| d\theta \\
&\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{R^2}{R^2 - \mu^2} \underbrace{e^{-rR \sin \theta}}_{<1 (\sin \theta > 0)} d\theta = 0 \quad (81)
\end{aligned}$$

$$\therefore (80), (81) \implies \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = i\pi e^{-r\mu} \quad (82)$$

同様に複素数平面上の平曲路 fig5 で

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + \mu^2} e^{-irz} \quad (z = x + iy) \quad (83)$$

を積分する。

$$\begin{cases} C_1 : \text{実軸上 } -R \rightarrow R \\ C_3 : z = Re^{i\theta} (\theta : 0 \rightarrow -\pi) \end{cases}$$

ただし、 $R > \mu$ とする。留数定理より

$$\oint_{C_1 + C_3} f(z) dz = -2\pi i \text{Res}(f; -i\mu) \quad (84)$$

(84) 式で右辺にマイナスがついているのは、時計回りの経路積分をしていることからくる。

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z}{z^2 + \mu^2} e^{-irz} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - i\mu} + \frac{1}{z + i\mu} \right) e^{-irz} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - i\mu} + \frac{1}{z + i\mu} \right) \underbrace{\left(e^{-r\mu} - ire^{-r\mu}(z + i\mu) + (z + i\mu \text{の } 2 \text{ 次以上の項}) \right)}_{e^{-irz} \text{を } z=-i\mu \text{の周りで Taylor 展開した部分}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{e^{-r\mu}}{z + i\mu} - \frac{1}{2} ire^{-r\mu} + (z + i\mu \text{の } 1 \text{ 次以上の項}) + \frac{1}{2} \frac{1}{z - i\mu} e^{-irz}
\end{aligned}$$

第1項以外は $z = -i\mu$ で正則なので、

$$\text{Res}(f; -i\mu) = \frac{1}{2}e^{-r\mu} \quad (85)$$

$$(84), (85) \implies \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_3} f(z) dz = -i\pi e^{-r\mu} \implies \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = -i\pi e^{-r\mu} - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_3} f(z) dz \quad (86)$$

C_3 上において $z = Re^{i\theta}$, $dz = iRe^{i\theta}$ より

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_3} f(z) dz \right| &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_0^{-\pi} iRe^{i\theta} \frac{Re^{i\theta}}{R^2 e^{2i\theta} + \mu^2} e^{-irRe^{i\theta}} d\theta \right| = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{-\pi} \left| \frac{R^2}{R^2 e^{2i\theta} + \mu^2} \right| |e^{-irR \cos \theta} e^{rR \sin \theta}| d\theta \\ &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{-\pi} \frac{R^2}{R^2 - \mu^2} \underbrace{e^{rR \sin \theta}}_{< 1 (\sin \theta < 0)} d\theta = 0 \end{aligned} \quad (87)$$

$$\therefore (86), (87) \implies \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = -i\pi e^{-r\mu} \quad (88)$$

$$\therefore (76), (82), (88) \implies \phi(\mathbf{r}) = \frac{q_0}{2i\pi r} 2i\pi e^{-r\mu} = \frac{q_0}{r} e^{-\mu r} \quad (89)$$

これは (73) 式よりも早く減衰する関数である。減衰の目安は $r = \mu^{-1}$ で、これより大きな r では ϕ は 0 と見なせるくらいに小さな値である。これは陽子や中性子同士を結びつけている強い相互作用などに見られるポテンシャルの形で、湯川型ポテンシャルと呼ばれることもある。

[6] pion, Strong interaction(強い力) について

原子核同士を結びつけている強い力は、核子間距離が 1fm 以内でなければはたらかない。これは核力を媒介する π 中間子が有限の質量を持っていることに起因する。このことから π 中間子の質量がどのくらいなのかを MeV 単位で見積もってみよう。 π 中間子のエネルギーの不確かさが $m_\pi c^2$ であるとし、不確か性原理から π 中間子の寿命を求めよう。またその間に π 中間子が光速で移動できる距離が核力の到達距離であるとしよう。

π 中間子の寿命を τ_π とおくと、不確か性原理より

$$\Delta E \tau_\pi \sim \hbar \iff \tau_\pi \sim \frac{\hbar}{\Delta E} \iff \tau_\pi c \sim \frac{\hbar c}{\Delta E} \sim 1 \text{ (fm)} \implies \Delta E \sim m_\pi c^2 \sim \frac{\overbrace{\hbar c}^{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}}{1 \text{ fm}} = 197 \text{ (MeV)} \quad (90)$$

[7] 熱・統計力学の復習

以下では熱・統計力学を復習する。温度 T で熱平衡状態にある質量 m の粒子系においてある粒子のエネルギーが $E \sim E + dE$ の範囲にある確率は

$$P(E)dE \propto e^{-\frac{E}{k_B T}} dE \quad (91)$$

で与えられる。特に非相対論的な運動をしている自由粒子系において、粒子が $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \sim \mathbf{v} + d\mathbf{v} = (v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z)$ にいる確率は $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ を (91) 式に代入することにより

$$P(v)dv_x dv_y dv_z \propto e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv_x dv_y dv_z \implies P(v) = C e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \quad (C \text{ は規格化定数}) \quad (92)$$

となる。

7-1.

では (92) 規格化定数を求めよう。両辺を全速度空間で体積積分する。

$$\begin{aligned} \iiint_{-\infty}^{\infty} P(v) d^3\mathbf{v} &= C \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \stackrel{v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2}{=} C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{2k_B T}} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_z^2}{2k_B T}} dv_z \\ &= C \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} dv_x \right)^3 = 1 \end{aligned} \quad (93)$$

ガウス積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (94)$$

より

$$(93) \implies C \left(\frac{2k_B T \pi}{m} \right)^{3/2} = 1 \iff C = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \quad (95)$$

$$\therefore (92), (95) \implies P(v)dv_x dv_y dv_z = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv_x dv_y dv_z \quad (96)$$

これを Maxwell-Boltzmann 分布 (Maxwellian) という。

7-2.

粒子 1 個の平均の運動エネルギーを求める。(96) 式より

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle &= \frac{1}{2}m \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \stackrel{dv_x dv_y dv_z = 4\pi v^2 dv}{=} 2\pi \frac{m^{5/2}}{(2\pi k_B T)^{3/2}} \int_0^{\infty} v^4 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv \\ &\stackrel{(99)}{=} 2\pi \frac{m^{5/2}}{(2\pi k_B T)^{3/2}} \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi(2k_B T)^5}{m^5}} = \frac{3}{4} 2k_B T = \frac{3}{2} k_B T \end{aligned} \quad (97)$$

途中、以下に示すようなガウスの積分式のたぐいを用いた。

$$(94) \stackrel{\text{両辺}\alpha\text{微分}}{\implies} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-\alpha x^2} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} \quad (98)$$

$$\stackrel{\text{さらに両辺}\alpha\text{微分}}{\implies} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}} \quad (99)$$

(97) 式の結果は、1 自由度あたり $\frac{1}{2}k_B T$ のエネルギーが割り振られる「エネルギー等分配則」を知っている方にとっては当然の結果と思えるだろう。

7-3.

クーロンポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ が存在するときは電子の全エネルギーは $E = \frac{1}{2}m_e v^2 - e\phi(\mathbf{r})$ となる。電子がある限られた体積 V の領域内にのみ存在するとき、位置 $\mathbf{r} \sim \mathbf{r} + d\mathbf{r}$ に電子が見つかる確率を求めてみよう。

速度が $\mathbf{v} \sim \mathbf{v} + d\mathbf{v}$ である電子が $\mathbf{r} \sim \mathbf{r} + d\mathbf{r}$ の位置にいる確率は

$$P(\mathbf{r})P(\mathbf{v})d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v} = C_1 e^{-\frac{1}{k_B T}(\frac{1}{2}m_e v^2 - e\phi(\mathbf{r}))} d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v} \quad (C_1 \text{は規格化定数}) \quad (100)$$

まずは両辺を全速度空間で体積積分するが、 $P(\mathbf{v})$ は (96) 式で与えられており、これは規格化済みである。また右辺の計算も 7-1 で一度やった計算である。

$$(100) \Rightarrow \underbrace{\iiint_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v}}_{=1} P(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} = C_1 e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}} d^3\mathbf{r} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}}_{7-1 \text{に同じ}} = C_1 \left(\frac{2\pi k_B T}{m}\right)^{3/2} e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}} d^3\mathbf{r} \quad (101)$$

さらにこの両辺を体積 V で体積積分する。

$$(101) \Rightarrow \underbrace{\iiint_V P(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}}_{=1} = C_1 \left(\frac{2\pi k_B T}{m}\right)^{3/2} \underbrace{\iiint_V e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}} d^3\mathbf{r}}_{\equiv A} \Leftrightarrow C_1 = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \frac{1}{A} \quad (102)$$

$$\therefore (101), (102) \Rightarrow P(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} = \frac{e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}}}{A} d^3\mathbf{r} \quad (103)$$

7-4.

ここで $V \rightarrow \infty$ とし、無限遠方では $\phi(\mathbf{r}) = 0$ とする。無限遠方での電子数密度を n_0 としたとき、任意の位置 \mathbf{r} での電子数密度はどうなるだろうか。

位置 \mathbf{r} での電子数密度を $n_e(\mathbf{r})$ とすると、 \mathbf{r} にある微小体積中に電子が見つかる確率は

$$P(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} = \frac{d^3\mathbf{r} \text{ 内にある電子数}}{\text{全電子数 } N} = \frac{n_e(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}}{\iiint_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{r} n_e(\mathbf{r})} \quad (104)$$

とも書ける。(103), (104) 式より

$$e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}} d^3\mathbf{r} \underbrace{\iiint_V n_e(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}}_{\text{全電子数 } N} = A n_e(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \Leftrightarrow n_e(\mathbf{r}) = \frac{N}{A} e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}} \quad (105)$$

無限遠 $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ での境界条件 $n_0 = N/A$ より

$$n_e(\mathbf{r}) = n_0 e^{\frac{e\phi(\mathbf{r})}{k_B T}} \quad (106)$$