08 Report 5 answer. (presented by Sho Nakamura)

update:16/Apr/2011

[1] received power, emitted power, Lienard's formula と Larmor's formula の導出

1-1. 電荷 q の粒子の加速度運動によって作られる輻射場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{c}\left[\frac{\mathbf{n}\times\left\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right\}}{R\kappa^3}\right] = \frac{q}{c}\left[\frac{\mathbf{g}}{R}\right] \tag{1}$$

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\kappa^3}\mathbf{n}\times\left\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right\} \tag{2}$$

で与えられる。ここで、$R(t') = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|$, $\boldsymbol{\beta} = \dfrac{\mathbf{u}}{c}$, $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{R}}{R}$, $\kappa = 1 - \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}$ などである。$\mathbf{r}_0(t')$ は遅延時間 t' での電荷の位置、$\mathbf{r}$ は観測者の位置である。以下、観測者は粒子から十分遠方にいて、粒子から観測者までの相対ベクトル $\mathbf{R}$ と $\mathbf{n}$ の粒子の運動による時間変化は無視できるとする。
単位時間単位面積あたりに輻射が運ぶエネルギーは Poynting vector の大きさに等しい。微小面積を dA とすると

$$\frac{dW}{dtdA} = S = \frac{c}{4\pi}[E^2] \tag{3}$$

$dA = [R^2]d\Omega$ より、観測者が受信する粒子からの単位立体角当たりの放射強度 (received power) は

$$\frac{dP_r}{d\Omega} = \frac{dW}{dtd\Omega} = \frac{c}{4\pi}[R^2E^2] \tag{4}$$

である。粒子が t' から $t' + dt'$ にかけて発した電磁波を観測者は t から $t + dt$ に受け取ったとする。

$$t = t' + \frac{R(t')}{c} \tag{5}$$

$$t + dt = t' + dt' + \frac{R(t'+dt')}{c} \tag{6}$$

$$(5), (6) \implies dt = dt' + \frac{1}{c}(R(t'+dt') - R(t')) = dt' + \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t'}dt' \tag{7}$$

途中、$dt, dt' \ll 1$ とした。

$$\frac{\partial R}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')| = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|}\cdot\left(-\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t'}\right) = -\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} \tag{8}$$

$$\therefore (7), (8) \implies dt = dt'(1 - \mathbf{n}\cdot\frac{\mathbf{u}}{c}) = \kappa dt' \tag{9}$$

1-2.

粒子が発した電磁波の単位時間あたりの放射強度を emitted power といい、

$$\frac{dP_e}{d\Omega} = \frac{dW}{dt' d\Omega} \tag{10}$$

のように書く。

$$(9),(10) \implies \frac{dP_e}{d\Omega} = \frac{[\kappa]}{dt}\frac{dW}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}[\kappa R^2 E^2] \tag{11}$$

1-3.

total emitted power は (1), (11) 式より

$$P_e = \frac{c}{4\pi}\int d\Omega[\kappa R^2 E^2] = \frac{q^2}{4\pi c}\int d\Omega[\kappa g^2] \tag{12}$$

この立体角積分を行うが、まず $\mathbf{u}$ を z 軸にとる。$\dot{\mathbf{u}}$ を xz 平面にとって、$\mathbf{u}$ との成す角を i とする。また $\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ とする。

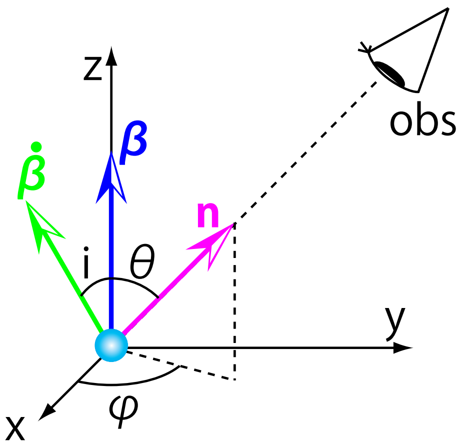


fig 1: 座標設定。

a) x, y, z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ とする。前文での定義より $\boldsymbol{\beta} = \beta\mathbf{e}_z$, $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\beta}(\sin i\,\mathbf{e}_x + \cos i\,\mathbf{e}_z)$, $\mathbf{n} = \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_y + \cos\theta\,\mathbf{e}_z$ である。これらより、

$$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta} = \beta\cos\theta \tag{13}$$

$$\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\beta}(\sin\theta\cos\phi\sin i + \cos\theta\cos i) \tag{14}$$

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}} = \beta\dot{\beta}\cos i \tag{15}$$

$$(2) \implies \mathbf{g} = \frac{1}{\kappa^3}\left\{(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) - (\mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}))\dot{\boldsymbol{\beta}}\right\} = \frac{1}{\kappa^3}(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) - \frac{1}{\kappa^3}\underbrace{(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})}_{\kappa}\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{\kappa^3}(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) - \frac{1}{\kappa^2}\dot{\boldsymbol{\beta}}$$

ローレンツ因子 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ を用いると

$$\begin{aligned}
g^2 &= \frac{1}{\kappa^6}(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})^2(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})^2 - \frac{2}{\kappa^5}(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})\left\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\right\} + \frac{1}{\kappa^4}\dot{\beta}^2 \\
&= \frac{1}{\kappa^6}(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})^2(1-2\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}+\beta^2) - \frac{2}{\kappa^5}(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}) + \frac{1}{\kappa^4}\dot{\beta}^2 \\
&= \frac{1}{\kappa^6}(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})^2(1-2\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}+\beta^2-2\kappa) + \frac{2}{\kappa^5}(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}) + \frac{1}{\kappa^4}\dot{\beta}^2 \\
&= \frac{1}{\kappa^6}(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})^2\underbrace{(-1+\beta^2)}_{-\gamma^{-2}} + \frac{2}{\kappa^5}(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}) + \frac{1}{\kappa^4}\dot{\beta}^2 = -\frac{1}{\kappa^6}(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})^2\gamma^{-2} + \frac{2}{\kappa^5}(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}) + \frac{1}{\kappa^4}\dot{\beta}^2
\end{aligned} \tag{16}$$

$$
\begin{aligned}
(14),(15),(16) \implies \kappa g^2 &= \dot{\beta}^2\{\frac{1}{\kappa^3}+\frac{2}{\kappa^4}\beta(\sin\theta\cos\phi\sin i\cos i+\cos\theta\cos^2 i) \\
&\quad -\frac{1}{\kappa^5}\gamma^{-2}(\sin^2\theta\cos^2\phi\sin^2 i+\cos^2\theta\cos^2 i+2\sin\theta\cos\theta\cos\phi\sin i\cos i)\} \qquad (17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{n+1} &\equiv \int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}} = \frac{1}{n\beta}\left[(1-\beta\mu)^{-n}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{n\beta}\left\{(1-\beta)^{-n}-(1+\beta)^{-n}\right\} \\
&= \frac{1}{n\beta}\left(\frac{(1+\beta)^n}{(1-\beta)^n(1+\beta)^n}-\frac{(1-\beta)^n}{(1-\beta)^n(1+\beta)^n}\right) = \frac{(1+\beta)^n-(1-\beta)^n}{n\beta(1-\beta^2)^n} \qquad (18)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{dI_n}{d\beta} = \int_{-1}^{1}d\mu\frac{d}{d\beta}\frac{1}{(1-\beta\mu)^n} = \int_{-1}^{1}d\mu(-n)(-\mu)\frac{1}{(1-\beta\mu)^{n+1}} = n\int_{-1}^{1}d\mu\frac{\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}}
$$

$$
\therefore\ J_{n+1} \equiv \int_{-1}^{1}d\mu\frac{\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}} = \frac{1}{n}\frac{dI_n}{d\beta} \qquad (19)
$$

$$
\frac{dJ_n}{d\beta} = \int_{-1}^{1}d\mu\frac{d}{d\beta}\frac{\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}} = \int_{-1}^{1}\mu(-n)(-\mu)\frac{1}{(1-\beta\mu)^{n+1}} = n\int_{-1}^{1}d\mu\frac{\mu^2}{(1-\beta\mu)^{n+1}}
$$

$$
\therefore\ K_{n+1} \equiv \int_{-1}^{1}d\mu\frac{\mu^2}{(1-\beta\mu)^{n+1}} = \frac{1}{n}\frac{dJ_n}{d\beta} \qquad (20)
$$

b, c) (17) 式を全立体角積分する。そこで以降、全立体角積分を

$$
\int d\Omega = \int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\phi\sin\theta \underbrace{=}_{\mu=\cos\theta} \int_0^{2\pi}d\phi\int_{-1}^{1}d\mu \qquad (21)
$$

のように書き換えた形で行う。(13) 式より $\kappa = 1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta} = 1-\beta\cos\theta = 1-\beta\mu$. よって

$$
\int d\Omega\frac{1}{\kappa^3} = \int_0^{2\pi}d\phi\int_{-1}^{1}d\mu\frac{1}{(1-\beta\mu)^3} \underbrace{=}_{(18)} 2\pi I_3 \qquad (22)
$$

$$
\int d\Omega\frac{1}{\kappa^4}\sin\theta\cos\phi\sin i\cos i = \sin i\cos i\underbrace{\int_0^{2\pi}d\phi\cos\phi}_{0}\int_{-1}^{1}d\mu\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{(1-\beta\mu)^4} = 0 \qquad (23)
$$

$$
\int d\Omega\frac{1}{\kappa^4}\cos\theta\cos^2 i = \cos^2 i\int_0^{2\pi}d\phi\int_{-1}^{1}d\mu\frac{\mu}{(1-\beta\mu)^4} \underbrace{=}_{(19)} 2\pi\cos^2 i J_4 \qquad (24)
$$

$$
\begin{aligned}
\int d\Omega\frac{1}{\kappa^5}\sin^2\theta\cos^2\phi\sin^2 i &= \sin^2 i\int_0^{2\pi}d\phi\cos^2\phi\int_{-1}^{1}d\mu\frac{1-\mu^2}{(1-\beta\mu)^5} \underbrace{=}_{(18),(20)} \sin^2 i\int_0^{2\pi}d\phi\frac{1+\cos 2\phi}{2}(I_5-K_5) \\
&= \pi\sin^2 i(I_5-K_5) \qquad (25)
\end{aligned}
$$

$$
\int d\Omega\frac{1}{\kappa^5}\sin\theta\cos\theta\cos\phi\sin i\cos i = \sin i\cos i\underbrace{\int_0^{2\pi}d\phi\cos\phi}_{0}\int_{-1}^{1}d\mu\frac{\mu\sqrt{1-\mu^2}}{(1-\beta\mu)^5} = 0 \qquad (26)
$$

$$\int d\Omega \frac{1}{\kappa^5} \cos^2\theta \cos^2 i = \cos^2 i \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d\mu \frac{\mu^2}{(1-\beta\mu)^5} \underbrace{=}_{(20)} 2\pi \cos^2 i K_5 \tag{27}$$

(12), (17), (22)∼(27) 式より

$$\begin{aligned}
P_e &= \frac{q^2}{4\pi c} \int d\Omega [\kappa g^2] = \frac{q^2}{4\pi c} \left[\dot{\beta}^2 \left\{ 2\pi I_3 + 2\beta \cdot 2\pi \cos^2 i J_4 - \gamma^{-2} (\pi \sin^2 i (I_5 - K_5) + 2\pi \cos^2 i K_5) \right\} \right] \\
&= \frac{q^2}{4\pi c} 2\pi \left[\dot{\beta}^2 \left\{ I_3 + 2\beta (1 - \sin^2 i) J_4 - \gamma^{-2} (\frac{1}{2} \sin^2 i (I_5 - K_5) + (1 - \sin^2 i) K_5) \right\} \right] \\
&= \frac{q^2}{4\pi c} 2\pi \left[\dot{\beta}^2 \left\{ I_3 + 2\beta J_4 - 2\beta \sin^2 i J_4 - \gamma^{-2} K_5 - \frac{1}{2\gamma^2} (I_5 - 3K_5) \sin^2 i \right\} \right] \\
&= \frac{q^2}{4\pi c} 2\pi \left[\dot{\beta} \left\{ I_3 + 2\beta J_4 - \gamma^{-2} K_5 - (2\beta J_4 + \frac{1}{2\gamma^2} (I_5 - 3K_5)) \sin^2 i \right\} \right] \\
&\underbrace{=}_{(19),(20)} \frac{q^2}{4\pi c} 2\pi \left[\dot{\beta} \left\{ I_3 + 2\beta \frac{1}{3} \frac{dI_3}{d\beta} - \gamma^{-2} \frac{1}{4} \frac{dJ_4}{d\beta} - (2\beta \frac{1}{3} \frac{dI_3}{d\beta} + \frac{1}{2\gamma^2} (I_5 - 3 \frac{1}{4} \frac{dJ_4}{d\beta})) \sin^2 i \right\} \right] \\
&\underbrace{=}_{(19),(20)} \frac{q^2}{4\pi c} 2\pi \left[\dot{\beta} \left\{ I_3 + \frac{2}{3} \beta \frac{dI_3}{d\beta} - \frac{1}{4\gamma^2} \frac{1}{3} \frac{d^2 I_3}{d\beta^2} - (\frac{2}{3} \beta \frac{dI_3}{d\beta} + \frac{1}{2\gamma^2} (I_5 - \frac{3}{4} \frac{1}{3} \frac{d^2 I_3}{d\beta^2})) \sin^2 i \right\} \right]
\end{aligned} \tag{28}$$

具体的に計算する。(18) 式より

$$I_3 = \frac{(1+\beta)^2 - (1-\beta)^2}{2\beta(1-\beta^2)^2} = \frac{4\beta}{2\beta(1-\beta^2)^2} = \frac{2}{(1-\beta^2)^2} = 2\gamma^4 \tag{29}$$

$$I_5 = \frac{(1+\beta)^4 - (1-\beta)^4}{4\beta(1-\beta^2)^2} = \frac{(1+4\beta+6\beta^2+4\beta^3+\beta^4) - (1-4\beta+6\beta^2-4\beta^3+\beta^4)}{4\beta(1-\beta^2)^4} = \frac{8\beta+8\beta^3}{4\beta(1-\beta^2)^4} = 2(1+\beta^2)\gamma^8 \tag{30}$$

$$\frac{dI_3}{d\beta} = \frac{-2 \cdot 2(1-\beta^2)(-2\beta)}{(1-\beta^2)^4} = \frac{8\beta}{(1-\beta^2)^3} = 8\beta\gamma^6 \tag{31}$$

$$\frac{d^2 I_3}{d\beta^2} = 8 \frac{d}{d\beta} \frac{\beta}{(1-\beta^2)^3} = 8 \frac{(1-\beta^2)^3 - \beta \cdot 3(1-\beta^2)^2(-2\beta)}{(1-\beta^2)^6} = 8 \frac{1-\beta^2+6\beta^2}{(1-\beta^2)^4} = 8 \frac{1+5\beta^2}{(1-\beta^2)^4} = 8(1+5\beta^2)\gamma^8 \tag{32}$$

(28)∼(32) より

$$\begin{aligned}
P_e &= \frac{q^2}{4\pi c} 2\pi [\dot{\beta} \{ I_3 + \frac{2}{3} \beta \cdot 8\beta\gamma^6 - \frac{1}{12\gamma^2} 8(1+5\beta^2)\gamma^8 - \left(\frac{2}{3} \beta \cdot 8\beta\gamma^6 + \frac{1}{2\gamma^2} (2(1+\beta^2)\gamma^8 - \frac{1}{4} 8(1+5\beta^2)\gamma^8) \right) \sin^2 i \}] \\
&= \frac{q^2}{4\pi c} 2\pi \left[\dot{\beta}^2 \left\{ 2\gamma^4 + \frac{16}{3} \beta^2\gamma^6 - \frac{2}{3} (1+5\beta^2)\gamma^6 - (\frac{16}{3} \beta^2\gamma^6 - 4\gamma^6\beta^2) \sin^2 i \right\} \right] \\
&= \frac{q^2}{4\pi c} 2\pi \left[\dot{\beta}^2 \left(2\gamma^4 + 2\beta^2\gamma^6 - \frac{2}{3} \gamma^6 - \frac{4}{3} \beta^2\gamma^6 \sin^2 i \right) \right] \\
&= \frac{q^2}{4\pi c} 2\pi \left[\dot{\beta}^2\gamma^6 \left(2\gamma^{-2} + 2\beta^2 - \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \beta^2 \sin^2 i \right) \right] \underbrace{=}_{\gamma^{-2}=1-\beta^2} \frac{q^2}{4\pi c} 2\pi \left[\dot{\beta}^2\gamma^6 \left(2 - \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \beta^2 \sin^2 i \right) \right] \\
&= \frac{q^2}{4\pi c} \underbrace{\frac{8\pi}{3} \left[\dot{\beta}^2\gamma^6 \left(1 - \beta^2 \sin^2 i \right) \right]}_{b)\ \text{の答え}} = \frac{2q^2}{3c^3} \left[\dot{u}\gamma^6 (1 - \beta^2 \sin^2 i) \right]
\end{aligned} \tag{33}$$

角度 i の定義より $|\dot{\mathbf{u}} \times \boldsymbol{\beta}| = \dot{u}\beta \sin i$.

$$\therefore P_e = \frac{2q^2}{3c^3}\left[\gamma^6(\dot{u}^2 - |\dot{\mathbf{u}} \times \boldsymbol{\beta}|^2)\right] \tag{34}$$

これをリエナーの式と呼ぶことにする。

d) 粒子の運動が非相対論的なとき、$\gamma \to 1, \boldsymbol{\beta} \to \mathbf{0}$、また $t_{ret} = t$ として

$$P_e = \frac{2q^2}{3c^3}\dot{u}^2 \tag{35}$$

これは非相対論的なリエナーの式で、Larmor の公式と言われるものである。

[2] 行列計算

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \sin\delta_2 & \cos\delta_2 \\ -\sin\delta_1 & -\cos\delta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\delta_2 & -\sin\delta_1 \\ \cos\delta_2 & -\cos\delta_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin^2\delta_2 + \cos^2\delta_2 & -\sin\delta_2\sin\delta_1 - \cos\delta_2\cos\delta_1 \\ -\sin\delta_2\sin\delta_1 - \cos\delta_2\cos\delta_1 & \sin^2\delta_1 + \cos^2\delta_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\cos(\delta_2 - \delta_1) \\ -\cos(\delta_2 - \delta_1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\delta \\ -\cos\delta & 1 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{36}$$

$\delta \equiv \delta_2 - \delta_1$ とした。

[3] 行列の固有値・固有ベクトル

(36) 式の行列を A とおく。また、A の固有値、固有ベクトルをそれぞれ $\lambda, \mathbf{u}$ とおくと

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \iff (A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

I は 2x2 の単位行列。逆行列 $(A - \lambda I)^{-1}$ が存在するとき、$\mathbf{u} = \mathbf{0}$ となりこれは不適。

$$\therefore det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\cos\delta \\ -\cos\delta & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \cos^2\delta = \lambda^2 - 2\lambda + \sin^2\delta = 0$$

$$\implies \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\sin^2\delta}}{2} = 1 \pm \cos\delta \tag{37}$$

(37) 式と $|\cos\delta| \leq 1$ より、固有値 λ は δ に関わらず 2 つとも正の値をとる。

[4] 行列の対角化

(37) 式より行列 A の固有値をそれぞれ $\lambda_1 = 1+\cos\delta, \lambda_2 = 1-\cos\delta$ とおく。また λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトルをそれぞれ

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \tag{38}$$

とおく。

(i)

$$A\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\delta \\ -\cos\delta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b\cos\delta \\ b-a\cos\delta \end{pmatrix} = \lambda_1\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} a+a\cos\delta \\ b+b\cos\delta \end{pmatrix} \implies a=-b$$

よって規格化された固有ベクトルは

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{39}$$

(ii)

$$A\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\delta \\ -\cos\delta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-d\cos\delta \\ d-c\cos\delta \end{pmatrix} = \lambda_2\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} c-c\cos\delta \\ d-d\cos\delta \end{pmatrix} \implies c=d$$

よって規格化された固有ベクトルは

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{40}$$

行列 A を対角化する行列を U とすると (39), (40) 式より

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{41}$$

$$U^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}|1\cdot 1 - 1\cdot(-1)|}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{42}$$

行列 U は $U^\dagger = {}^tU = U^{-1}$ を満たすのでユニタリー行列である。確かめ算をすると、

$$\begin{aligned} U^{-1}AU &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\cos\delta \\ -\cos\delta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\delta & -\cos\delta-1 \\ 1-\cos\delta & -\cos\delta+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\delta+\cos\delta+1 & 0 \\ 0 & 1-\cos\delta-\cos\delta+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\cos\delta & 0 \\ 0 & 1-\cos\delta \end{pmatrix} \underbrace{=}_{(37)} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{43}$$

[5] 完全 2 次形式を満たす変数の変換

$$X^2+Y^2-2XY\cos\delta=\sin^2\delta \tag{44}$$

という 2 次形式を満たす X, Y に

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = U^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \tag{45}$$

なる変換をほどこす。また

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} = \left[U^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right]^T = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\left[U^{-1}\right]^T = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} U \tag{46}$$

である。

$$\begin{aligned}
(44) \quad \Longleftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\cos\delta \\ -\cos\delta & 1 \end{pmatrix}}_{(43)}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} U}_{(46)}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\underbrace{U^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}}_{(45)} \\
= \quad & \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2=\sin^2\delta \\
& \Longrightarrow \ (1+\cos\delta)\xi^2+(1-\cos\delta)\eta^2=(1-\cos\delta)(1+\cos\delta) \qquad (47)
\end{aligned}$$

(47) 式より、場合分けが必要である。$\delta=0,2\pi,4\pi,\cdots$ のときは $\xi=0$, $\delta=\pi,3\pi,5\pi,\cdots$ のときは $\eta=0$ である。よって

$$\begin{cases} \xi=0 & (\delta=2n\pi) \\ \eta=0 & (\delta=(2n+1)\pi) \\ \dfrac{\xi^2}{1-\cos\delta}+\dfrac{\eta^2}{1+\cos\delta}=1 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{48}$$

ただし、$n=0,1,2,\cdots$ である。

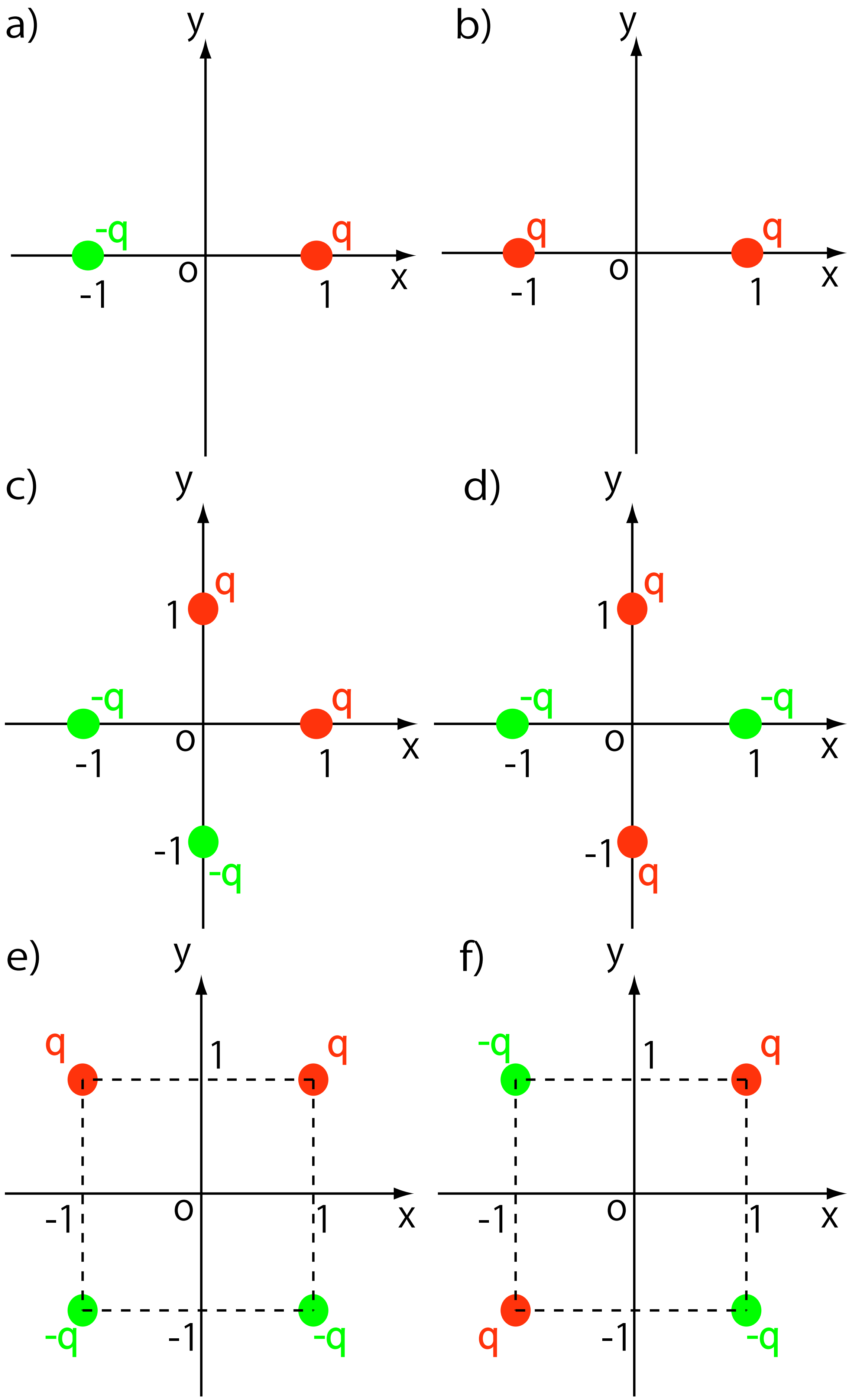
[6] dipole moment, quadro-pole moment その 1

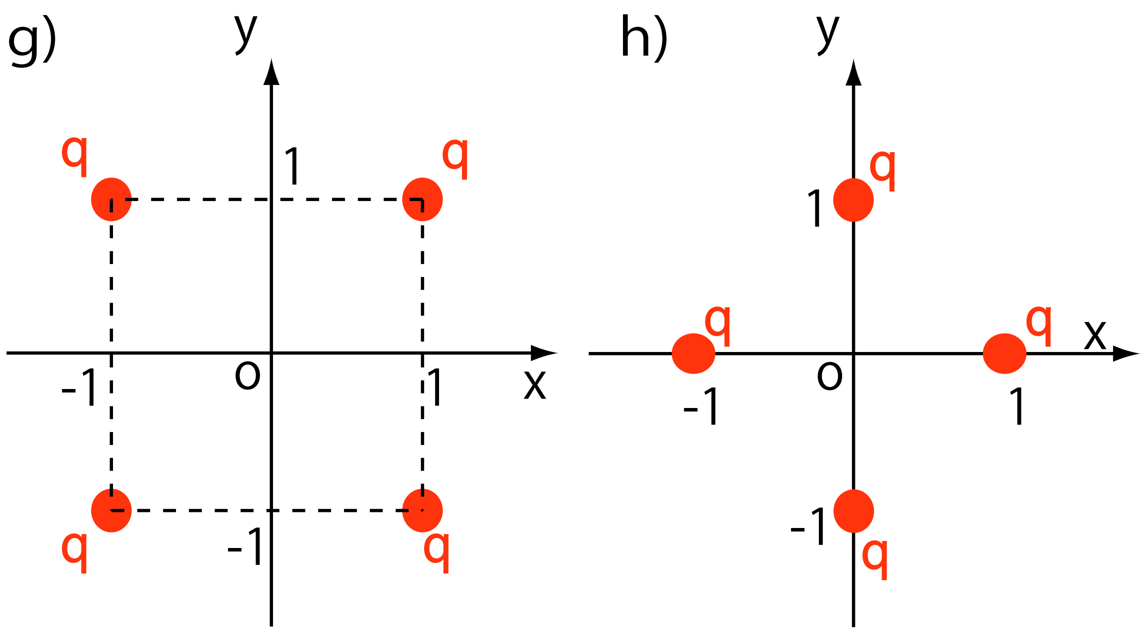
双極子 (diplole) モーメントと四重極子 (quadropole) モーメントを次式のように定義する。

$$\mathbf{d}\equiv\sum_j q_j\mathbf{r}_j \tag{49}$$

$$Q\equiv\begin{pmatrix} \sum_j q_jx_jx_j & \sum_j q_jx_jy_j \\ \sum_j q_jy_jx_j & \sum_j q_jy_jy_j \end{pmatrix} \tag{50}$$

これを以下の場合に計算する。


a)
y
-q
q
o
-1
1
x
b)
y
q
q
o
-1
1
x
c)
y
q
1
-q
q
o
x
-1
1
-1
-q
d)
y
q
1
-q
-q
o
x
-1
1
-1
q
e)
y
q
q
1
-1
o
1
x
-1
-q
-q
f)
y
-q
q
1
-1
o
1
x
-1
q
-q



a)

$$\begin{cases} q_1 = q \\ q_2 = -q \end{cases} \begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_x \\ \mathbf{r}_2 = -\mathbf{e}_x \end{cases} \implies \mathbf{d} = q\mathbf{e}_x + (-q)(-\mathbf{e}_x) = 2q\mathbf{e}_x \ , \ Q = \begin{pmatrix} q + (-q) & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 \end{pmatrix} = 0 \tag{51}$$

b)

$$\begin{cases} q_1 = q \\ q_2 = q \end{cases} \begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_x \\ \mathbf{r}_2 = -\mathbf{e}_x \end{cases} \implies \mathbf{d} = q\mathbf{e}_x + q(-\mathbf{e}_x) = \mathbf{0} \ , \ Q = \begin{pmatrix} q+q & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{52}$$

c)

$$\begin{cases} q_1 = q \\ q_2 = q \\ q_3 = -q \\ q_4 = -q \end{cases} \begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_x \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_y \\ \mathbf{r}_3 = -\mathbf{e}_x \\ \mathbf{r}_4 = -\mathbf{e}_y \end{cases} \implies \mathbf{d} = q\mathbf{e}_x + q\mathbf{e}_y + (-q)(-\mathbf{e}_x) + (-q)(-\mathbf{e}_y) = 2q(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) \tag{53}$$

$$Q = \begin{pmatrix} q + 0 + (-q) + 0 & 0+0+0+0 \\ 0+0+0+0 & 0 + q + 0 + (-q) \end{pmatrix} = 0 \tag{54}$$

d)

$$\begin{cases} q_1 = -q \\ q_2 = q \\ q_3 = -q \\ q_4 = q \end{cases} \begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_x \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_y \\ \mathbf{r}_3 = -\mathbf{e}_x \\ \mathbf{r}_4 = -\mathbf{e}_y \end{cases} \implies \mathbf{d} = -q\mathbf{e}_x + q\mathbf{e}_y + (-q)(-\mathbf{e}_x) + q(-\mathbf{e}_y) = \mathbf{0} \tag{55}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -q + 0 + (-q) + 0 & 0+0+0+0 \\ 0+0+0+0 & 0 + q + 0 + q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2q & 0 \\ 0 & 2q \end{pmatrix} \tag{56}$$

e)

$$\begin{cases} q_1 = q \\ q_2 = q \\ q_3 = -q \\ q_4 = -q \end{cases} \begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \\ \mathbf{r}_2 = -\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \\ \mathbf{r}_3 = -\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \\ \mathbf{r}_4 = \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \end{cases} \implies \mathbf{d} = q(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) + q(-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) + (-q)(-\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y) + (-q)(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y) = 4q\mathbf{e}_y \tag{57}$$

$$Q = \begin{pmatrix} q + q + (-q) + (-q) & q - q + (-q) - (-q) \\ q - q + (-q) - (-q) & q + q + (-q) + (-q) \end{pmatrix} = 0 \tag{58}$$

f)

$$\begin{cases} q_1 = q \\ q_2 = -q \\ q_3 = q \\ q_4 = -q \end{cases} \begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \\ \mathbf{r}_2 = -\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \\ \mathbf{r}_3 = -\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \\ \mathbf{r}_4 = \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \end{cases} \implies \mathbf{d} = q(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) + (-q)(-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) + q(-\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y) + (-q)(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y) = \mathbf{0} \tag{59}$$

$$Q = \begin{pmatrix} q + (-q) + q + (-q) & q - (-q) + q - (-q) \\ q - (-q) + q - (-q) & q + (-q) + q + (-q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4q \\ 4q & 0 \end{pmatrix} \tag{60}$$

g)

$$\begin{cases} q_1 = q \\ q_2 = q \\ q_3 = q \\ q_4 = q \end{cases} \begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \\ \mathbf{r}_2 = -\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \\ \mathbf{r}_3 = -\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \\ \mathbf{r}_4 = \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \end{cases} \implies \mathbf{d} = q(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) + q(-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) + q(-\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y) + q(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y) = \mathbf{0} \tag{61}$$

$$Q = \begin{pmatrix} q + q + q + q & q - q + q - q \\ q - q + q - q & q + q + q + q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4q & 0 \\ 0 & 4q \end{pmatrix} \tag{62}$$

h)

$$\begin{cases} q_1 = q \\ q_2 = q \\ q_3 = q \\ q_4 = q \end{cases} \begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_x \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_y \\ \mathbf{r}_3 = -\mathbf{e}_x \\ \mathbf{r}_4 = -\mathbf{e}_y \end{cases} \implies \mathbf{d} = q\mathbf{e}_x + q\mathbf{e}_y + q(-\mathbf{e}_x) + q(-\mathbf{e}_y) = \mathbf{0} \tag{63}$$

$$Q = \begin{pmatrix} q + 0 + q + 0 & 0 - 0 + 0 - 0 \\ 0 - 0 + 0 - 0 & 0 + q + 0 + q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q & 0 \\ 0 & 2q \end{pmatrix} \tag{64}$$