08 Report 3 answer. (presented by Sho Nakamura)

update:16/Apr/2011

[1] Lorentz gauge の自由度

Maxwell 方程式より

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{cases}$$

まず $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ が必ず成り立つような $\mathbf{B}$ を考える。すると

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{1}$$

とすれば、divergence を取ったときにベクトル恒等式より $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ が必ず成り立つ。よってこれを磁場をベクトルポテンシャルの rotation と定義する。さらに (1) 式より

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0 \iff \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{2}$$

$\mathbf{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\phi$ とおけば (2) 式は恒等的に成り立つ。よって

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{3}$$

残りの Maxwell 方程式

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{B} = \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

に (3) 式を代入。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = -\nabla^2\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\nabla^2\phi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \\ &= -\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}\right) = 4\pi\rho \end{aligned} \tag{4}$$

さらに

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

$$\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} - \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}$$

$$\Longrightarrow \ \therefore \ -\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{5}$$

これらが、電磁ポテンシャルが満たす式である。
電磁ポテンシャルにはどのような自由度が存在するだろうか。ここで、電磁ポテンシャルの自由度とは電磁ポテンシャルの形を変えても、観測料である電場・磁場・電荷密度・電流密度が不変であるような場合、それを自由度と呼ぶ。それを調べるために $\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}'$, $\mathbf{E}' = -\nabla\phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}$ として $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi(\mathbf{r}, t)$ を代入してみる。

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\chi(\mathbf{r}, t)) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla\chi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \tag{6}$$

$$\mathbf{E}' = -\nabla\phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \nabla\chi) = -\nabla\left(\phi' + \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{7}$$

すると

$$\begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi(\mathbf{r}, t) \\ \\ \phi' = \phi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\chi}{\partial t} \end{cases} \tag{8}$$

なる gauge 変換では $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ は不変である。この gauge 変換より (4), (5) において $\phi \to \phi'$, $\mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ のように置換すると

$$(4) \implies -\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi'}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{A}'\right) = 4\pi\rho \tag{9}$$

$$(5) \implies -\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A}' + \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi'}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{10}$$

この 2 つの式において $\nabla\cdot\mathbf{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi'}{\partial t} = 0$ となるような gauge 変換 (Lorentz gauge) を考えると、

$$\nabla\cdot\mathbf{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi'}{\partial t} = \nabla\cdot(\mathbf{A} + \nabla\chi) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}\right) = 0 \iff \nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{\partial\phi}{\partial t} = -\nabla^2\chi + \frac{1}{c}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} \tag{11}$$

もし、$\chi(\mathbf{r}, t) = \chi(\mathbf{r})$ かつ $\nabla^2\chi = 0$ であれば $\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$ が成立。変換前と変換後の結果が等しくなっているので、これは自由度を意味する。

[2] retarded Green function

$$\Box\, G(\mathbf{r}, t) = -\delta^3(\mathbf{r})\delta(t) \tag{12}$$

を満たす Green 関数のうち

$$G(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \neq 0 & (t \geq 0) \\ = 0 & (t < 0) \end{cases} \tag{13}$$

を満たすものを遅延 Green 関数と呼ぶ。これを求めてみよう。

a) Fourier 変換を駆使して、Green 関数のスペクトルを求める。Green function, delta function の Fourier 積分表示

$$G(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \iiint_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k}\hat{G}(\mathbf{k},\omega)e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{14}$$

$$\delta(\mathbf{r})\delta(t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \iiint_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k}e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{15}$$

$(12),(14),(15) \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\Box\, G(\mathbf{r},t) &= \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \iiint_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k}\hat{G}(\mathbf{k},\omega)e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \iiint_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k}\hat{G}(\mathbf{k},\omega)\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \iiint_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k}\hat{G}(\mathbf{k},\omega)\left(i^2\left|\mathbf{k}\right|^2 - \frac{1}{c^2}(-i\omega)^2\right)e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \iiint_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k}\hat{G}(\mathbf{k},\omega)\left(-\left|\mathbf{k}\right|^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \iiint_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k}e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\therefore\ \hat{G}(\mathbf{k},\omega) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}} = -\frac{c^2}{(2\pi)^4}\frac{1}{\omega^2 - c^2k^2} \tag{17}$$

b) a) の結果を逆フーリエ変換して遅延 Green 関数を求めたい。

$$G(\mathbf{r},t) = -\frac{c^2}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \iiint_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k}\frac{e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\omega^2 - c^2k^2} = -\frac{c^2}{(2\pi)^4}\iiint_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - c^2k^2} \tag{18}$$

ω での積分を実行するために $f(z) = \dfrac{e^{-izt}}{z^2 - c^2k^2}$ の積分を複素数平面上で行う事を考える。fig1 のような積分経路を考える $(z = \omega + i\Omega)$。このように極を上に避けるように積分経路を選択する事で遅延 Green 関数の条件を満たす事ができる。

$$\begin{cases}
C_1 : \omega\text{軸上} - R \to -ck - r \\
C_2 : z = re^{i\theta} - ck\ (\theta : \pi \to 0) \\
C_3 : \omega\text{軸上} - ck + r \to ck - r \\
C_4 : z = re^{i\theta} + ck\ (\theta : \pi \to 0) \\
C_5 : \omega\text{軸上}\ ck + r \to R \\
C_6 : z = Re^{i\theta}\ (\theta : 0 \to \pi) \\
C_7 : z = Re^{i\theta}\ (\theta : 0 \to -\pi)
\end{cases} \tag{19}$$

(i)

Cauchy の積分定理より

$$\oint_{C_1+C_2+C_3+C_4+C_5+C_6} dzf(z) = \int_{C_1+C_2+C_3+C_4+C_5} dzf(z) + \int_{C_6} dzf(z) = 0 \tag{20}$$

$C_6 : z = Re^{i\theta}\ (\theta : 0 \to \pi)$ において $dz = iRe^{i\theta}d\theta$ より

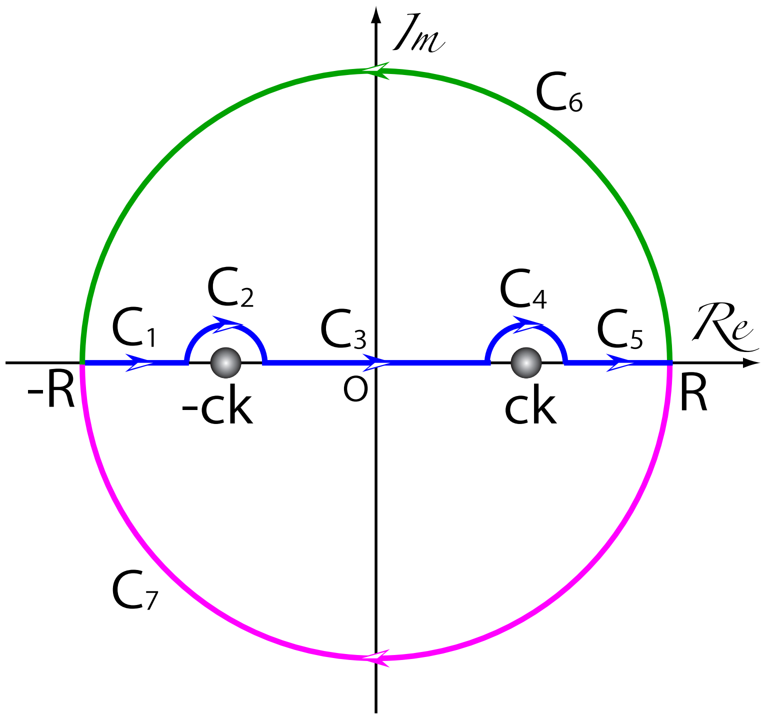

fig 1: retarded Green function の条件を満たすための積分経路。

$$\int_{C_6} dz f(z) = \int_0^\pi d\theta \frac{iRe^{i\theta}}{R^2 e^{2i\theta} - c^2k^2} e^{-itRe^{i\theta}} = iR\int_0^\pi d\theta \frac{e^{i\theta}}{R^2 e^{2i\theta} - c^2k^2} e^{-itR\cos\theta} e^{tR\sin\theta}$$

両辺の絶対値を取って評価する。

$$\begin{aligned} \left|\int_{C_6} dz f(z)\right| &= \left|iR\int_0^\pi d\theta \frac{e^{i\theta}}{R^2 e^{2i\theta} - c^2k^2} e^{-itR\cos\theta} e^{tR\sin\theta}\right| = R\int_0^\pi d\theta \left|\frac{e^{i\theta}}{R^2 e^{2i\theta} - c^2k^2}\right| \left|e^{-itR\cos\theta}\right| \left|e^{tR\sin\theta}\right| \\ &\leq R\int_0^\pi d\theta \frac{e^{tR\sin\theta}}{R^2 - c^2k^2} \ (\because\ \left|e^{i\theta}\right| = 1, \left|R^2 e^{2i\theta} - c^2k^2\right| \geq R^2 - c^2k^2) \end{aligned} \tag{21}$$

$0 < \theta < \pi$ で $\sin\theta > 0$ より

$$(20), (21) \implies \lim_{R\to\infty, r\to 0} \int_{C_1+C_2+C_3+C_4+C_5} dz\ f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - c^2k^2} = 0\ (t < 0) \tag{22}$$

(ii)
留数定理より

$$\oint_{C_1+C_2+C_3+C_4+C_5+C_7} dz f(z) = -2\pi i \left\{\mathrm{Res}(f, -ck) + \mathrm{Res}(f, ck)\right\} \tag{23}$$

ここで $\mathrm{Res}(f, a)$ は関数 f の a に対する留数である。また右辺の不符号は積分が時計回りであることからくる.

$$f(z) = \frac{e^{-izt}}{z^2 - c^2k^2} = \frac{1}{2ck}\left(\frac{1}{z - ck} - \frac{1}{z + ck}\right) e^{-izt}$$

のように変形し、e^{-izt} を $z = ck, -ck$ のまわりで Taylor 展開したもの

$$e^{-izt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}e^{-izt}\bigg|_{z=ck}(z-ck)^n = e^{-ickt} + (-it)e^{-ickt}(z-ck) + \frac{(-it)^2}{2}e^{-ickt}(z-ck)^2 + \cdots$$

$$e^{-izt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}e^{-izt}\bigg|_{z=-ck}(z+ck)^n = e^{ickt} + (-it)e^{ickt}(z+ck) + \frac{(-it)^2}{2}e^{ickt}(z+ck)^2 + \cdots$$

を代入すると

$$f(z) = \frac{1}{2ck}\left\{\left(\frac{e^{-ickt}}{z-ck} + (-it)e^{-ickt} + \frac{(-it)^2}{2}e^{-ickt}(z-ck) + \cdots\right) - \left(\frac{e^{ickt}}{z+ck} + (-it)e^{ickt} + \frac{(-it)^2}{2}e^{ickt}(z+ck) + \cdots\right)\right\} \tag{24}$$

$z = ck$ で正則でないのは $\dfrac{1}{2ck}\dfrac{e^{-ickt}}{z-ck}$ の項のみ。また $z = -ck$ で正則でないのは $-\dfrac{1}{2ck}\dfrac{e^{ickt}}{z+ck}$ 項のみ。よって

$$(23) \implies \int_{C_1+C_2+C_3+C_4+C_5+C_6} dz\ f(z) + \int_{C_7} dz\ f(z) = -\frac{\pi i}{ck}\left(-e^{ickt} + e^{-ickt}\right) \tag{25}$$

$r \to 0, R \to \infty$ として

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) = -\lim_{R\to\infty}\int_{C_7} dz f(z) - \frac{\pi i}{ck}\left(-e^{ickt} + e^{-ickt}\right) \tag{26}$$

(26) 式での C_7 上での積分は先ほどの C_6 上での積分区間を $\theta : 0 \to -\pi$ にしたものに等しい。よって

$$\int_{C_7} dz f(z) = \int_0^{-\pi} d\theta \frac{iRe^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta} - c^2k^2}e^{-itRe^{i\theta}} = iR\int_0^{\pi} d\theta \frac{e^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta} - c^2k^2}e^{-itR\cos\theta}e^{tR\sin\theta}$$

両辺の絶対値をとって評価すると

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_7} dz f(z)\right| &= \left|iR\int_0^{-\pi} d\theta \frac{e^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta} - c^2k^2}e^{-itR\cos\theta}e^{tR\sin\theta}\right| = R\int_0^{-\pi} d\theta \left|\frac{e^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta} - c^2k^2}\right|\left|e^{-itR\cos\theta}\right|\left|e^{tR\sin\theta}\right| \\ &\le R\int_0^{-\pi} d\theta \frac{e^{tR\sin\theta}}{R^2 - c^2k^2}\ (\because\ \left|e^{i\theta}\right| = 1, \left|R^2e^{2i\theta} - c^2k^2\right| \ge R^2 - c^2k^2)\end{aligned} \tag{27}$$

$-\pi < \theta < 0$ で $\sin\theta < 0$ より

$$(26),(27) \implies \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - c^2k^2} = -\frac{\pi i}{ck}\left(-e^{ickt} + e^{-ickt}\right) = -\frac{2\pi}{ck}\sin ckt\ (t > 0) \tag{28}$$

$$(18),(22),(28) \implies G(\mathbf{r},t) = \begin{cases} \dfrac{c}{(2\pi)^3}\displaystyle\iiint_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\sin ckt}{k} & (t > 0) \\ 0 & (t < 0)\end{cases} \tag{29}$$

今度は $\mathbf{k}$ 空間での積分を行う。そのためには、積分領域が $\mathbf{k}$ 空間全体にわたり、かつ計算が簡単になるような座標を設定してやればよい。というわけで式をじっと眺めていると思いつくのは fig2 のように $\mathbf{r}$ を k_z に一致させる座標設定である。すると

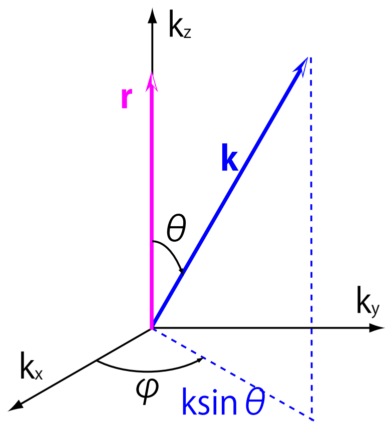

fig 2: 座標設定。

$$
\begin{aligned}
\iiint_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\sin ckt}{k} &= \int_0^\infty dk\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\frac{e^{ikr\cos\theta}\sin ckt}{k}k^2\sin\theta \\
&\underbrace{=}_{\mu=\cos\theta} 2\pi\int_0^\infty dk\int_{-1}^1 d\mu k e^{ikr\mu}\sin ckt \\
&= 2\pi\int_0^\infty dk\frac{1}{ir}\left(e^{ikr}-e^{-ikr}\right)\frac{e^{ickt}-e^{-ickt}}{2i} \\
&= -\frac{\pi}{r}\int_0^\infty dk\left(e^{ik(r+ct)}-e^{ik(r-ct)}-e^{i(-k)(r-ct)}+e^{i(-k)(r+ct)}\right) \\
&= -\frac{\pi}{r}\int_{-\infty}^\infty dk\left(e^{ik(r+ct)}-e^{ik(r-ct)}\right) = -\frac{2\pi^2}{r}(\delta(r+ct)-\delta(r-ct)) \\
&= -\frac{2\pi^2}{cr}\left(\delta\left(t+\frac{r}{c}\right)-\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) \qquad (30)
\end{aligned}
$$

$t>0, r>0$ より $\delta\left(t+\frac{r}{c}\right)=0$。

$$
\therefore (29),(30) \implies G(\mathbf{r},t) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\delta(t-\frac{r}{c})}{r} & (t>0) \\ 0 & (t<0) \end{cases} \tag{31}
$$

c)

$$
\int_{-\infty}^\infty dx\frac{\sin x}{x} = \pi \tag{32}
$$

で極の避け方が議論されなかったのは、実は $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ であり $x=0$ が極ではないからである。しかし計算の便宜上、(32) 式を

$$
\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{ix}}{x}-\frac{e^{-ix}}{x}\right) \tag{33}
$$

のように変形して計算したため、極のように見えるだけである。(32) 式の計算は実際には Cauchy の主値の表記を用いて

$$
P\int_{-\infty}^\infty dx\frac{\sin x}{x} = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} dx\frac{\sin x}{x}+\int_\epsilon^\infty dx\frac{\sin x}{x}\right) = \int_{-\infty}^\infty dx\frac{\sin x}{x} \tag{34}
$$

のように書く。特異点を半円で避けその半径の 0 極限を取る場合、いくら積分経路を 0 に持っていっても特異点で無限大に発散しているため、経路積分は有限の値となる。しかし、この積分は x=0 で有限の値かつ連続なので問題ないのである。

[3] Doppler effect

時刻 t' における光源と観測者との距離を R とする。fig3 のように考える。dt' は微小より $\mathbf{n} \simeq \mathbf{n}'$ としてよい。微小時間 dt' での観測者から光源の距離の変化は、$dt'\mathbf{u}$ を観測者の視線方向へ射影したものに等しい。距離変化を dR とおくと

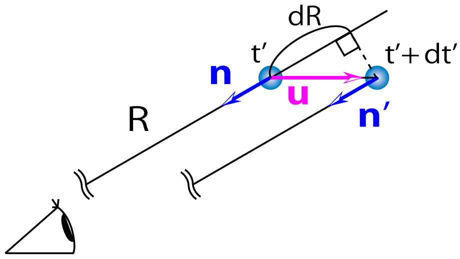

fig 3: 遠方物体が放つ光の観測。

$$dR = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dt' \tag{35}$$

時刻 t' に放たれた光を観測者が時刻 t に受け取ったとすると

$$t = t' + \frac{R}{c} \tag{36}$$

時刻 $t' + dt'$ に放たれた光を観測者が時刻 $t + dt$ に受け取ったとすると

$$t + dt = t' + dt' + \frac{R + dR}{c} \tag{37}$$

$$(35),(36),(37) \implies dt = \left(t' + dt' + \frac{R + dR}{c}\right) - \left(t' + \frac{R}{c}\right) = dt' + \frac{dR}{c} = \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}}{c}\right) dt' \tag{38}$$

[4] Lienard-Wiechart potentials

$\Box \phi(\mathbf{r}, t) = -4\pi\rho(\mathbf{r}, t)$ の解は

$$\phi(\mathbf{r}, t) = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} dt' \iiint_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{r} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')\rho(\mathbf{r}', t') \tag{39}$$

$\Box\, \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ の解は

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \iiint_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{r} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')\mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \tag{40}$$

運動する 1 個の点電荷を考える。電荷 q, 点電荷の位置を $\mathbf{r}_0(t)$, 速度を $\mathbf{u}(t) \left(= \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}\right)$ とおくと

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{r}, t) = q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)) \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{u}(t)\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)) \end{cases} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} (39),(40),(41) \implies \phi &= 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} dt' \iiint_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{r}' \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t - t' - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} q\delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t')) \\ &= q \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta(t - t' - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|}{c})}{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')} \ (t > t') \end{aligned} \tag{42}$$

$f(t') = -t' + t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c}$ とおくと、delta function の公式より

$$\phi = q\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t_{\mathrm{ret}})|}\frac{1}{\left|\left.\dfrac{df}{dt'}\right|_{t=t_{\mathrm{ret}}}\right|} \tag{43}$$

となる。ここで、

$$t_{\mathrm{ret}} \equiv t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t_{\mathrm{ret}})|}{c} \tag{44}$$

は遅延時間 (retarded time) である。

$$\frac{df}{dt'} = -1 - \frac{1}{c}\frac{d}{dt'}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')| = -1 - \frac{1}{c}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|}\cdot\left(-\frac{d\mathbf{r}_0(t')}{dt'}\right) = -1 + \frac{1}{c}\frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')}\cdot\mathbf{u}\ \ (\mathbf{R}(t') \equiv \mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')) \tag{45}$$

さらに $\boldsymbol{\beta}(t) \equiv \dfrac{\mathbf{u}(t)}{c}, \mathbf{n}(t) \equiv \dfrac{\mathbf{R}(t)}{R(t)}$ を導入すると

$$(44),(43),(45) \implies \phi = \frac{q}{R(t_{\mathrm{ret}})\,|-1+\mathbf{n}(t_{\mathrm{ret}})\cdot\boldsymbol{\beta}(t_{\mathrm{ret}})|} \tag{46}$$

$\mathbf{n}(t_{\mathrm{ret}})\cdot\boldsymbol{\beta}(t_{\mathrm{ret}}) < 1$ より $\kappa(t_{\mathrm{ret}}) \equiv 1-\mathbf{n}(t_{\mathrm{ret}})\cdot\boldsymbol{\beta}(t_{\mathrm{ret}})$ として

$$\phi = \frac{q}{R(t_{\mathrm{ret}})\,(1-\mathbf{n}(t_{\mathrm{ret}})\cdot\boldsymbol{\beta}(t_{\mathrm{ret}}))} = \frac{q}{R(t_{\mathrm{ret}})\kappa(t_{\mathrm{ret}})} \tag{47}$$

(31), (40), (41) を用いて同様の計算を行うと

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \frac{4\pi}{c}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\iiint_{-\infty}^{\infty}d^3\mathbf{r}'\frac{1}{4\pi}\frac{\delta(t-t'-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}q\mathbf{u}(t')\delta^3(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0(t')) = \frac{q}{c}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\frac{\delta(t-t'-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|}\mathbf{u}(t') \\
&= \frac{q}{c}\frac{\mathbf{u}(t_{\mathrm{ret}})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t_{\mathrm{ret}})|}\frac{1}{\left|-1+\frac{1}{c}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t_{\mathrm{ret}})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t_{\mathrm{ret}})|}\cdot\mathbf{u}(t_{\mathrm{ret}})\right|} = \frac{q\mathbf{u}(t_{\mathrm{ret}})}{cR(t_{\mathrm{ret}})}\frac{1}{|-1+\mathbf{n}(t_{\mathrm{ret}})\cdot\boldsymbol{\beta}(t_{\mathrm{ret}})|} = \frac{q\mathbf{u}(t_{\mathrm{ret}})}{cR(t_{\mathrm{ret}})\kappa(t_{\mathrm{ret}})}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{q\mathbf{u}(t_{\mathrm{ret}})}{cR(t_{\mathrm{ret}})\kappa(t_{\mathrm{ret}})} = \frac{q\boldsymbol{\beta}(t_{\mathrm{ret}})}{R(t_{\mathrm{ret}})\kappa(t_{\mathrm{ret}})} \tag{48}$$

(47), (48) 式を The Lienard-Wiechart potentials という。