08 Report 2 answer. (presented by Sho Nakamura)

update:16/Apr/2011

[1] δ 関数を含む積分計算

δ 関数の性質を復習するためにも、ここらであらかたの計算を行う。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(x-1) \underbrace{=}_{x-1=y} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y+1)\delta(y) \underbrace{=}_{\delta\text{関数の性質より}} f(0+1) = f(1) \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(3x) \underbrace{=}_{3x=y} \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} dy f(\frac{y}{3})\delta(y) = \frac{1}{3}f(0) \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(-3x) \underbrace{=}_{-3x=y} -\frac{1}{3}\int_{\infty}^{-\infty} dy f(-\frac{y}{3})\delta(y) = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} dy f(-\frac{y}{3})\delta(y) = \frac{1}{3}f(0) \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(x^2-1) = \int_{-\infty}^{0} dx f(x)\delta(x^2-1) + \int_{0}^{\infty} dx f(x)\delta(x^2-1) \tag{4}$$

ここで $y = x^2 - 1$ と置くが、$x > 0$ では $x = \sqrt{y+1}$、$x < 0$ では $x = -\sqrt{y+1}$ より

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(x^2-1) \quad &= \int_{\infty}^{-1} \frac{dy}{-2\sqrt{y+1}} f(-\sqrt{y+1})\delta(y) + \int_{-1}^{\infty} \frac{dy}{2\sqrt{y+1}} f(\sqrt{y+1})\delta(y) \\
&= \int_{-1}^{\infty} \frac{dy}{2\sqrt{y+1}} (f(-\sqrt{y+1})) + f(\sqrt{y+1}))\delta(y) \\
&\underbrace{=}_{\delta(y\neq 0)=0\ \text{より}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{2\sqrt{y+1}} (f(-\sqrt{y+1})) + f(\sqrt{y+1}))\delta(y) \\
&= \frac{1}{2}(f(-1) + f(1))
\end{aligned} \tag{5}$$

$g(x)$ は単調関数で、$x = x_0$ でのみ 0 となる関数とする。

$$y = g(x) \implies dy = \frac{dg}{dx}dx \tag{6}$$

$g(x)$ の単調性より

$$\begin{cases} \dfrac{dg}{dx} > 0 & (\text{単調増加}) \\ \\ \dfrac{dg}{dx} < 0 & (\text{単調減少}) \end{cases} \tag{7}$$

の 2 通りで場合分けして考える。

(i) 単調増加の場合

$x : -\infty \to \infty$ で $y : -\infty \to \infty$ より

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{\frac{dg}{dx}} f(g^{-1}(y))\delta(y) = \frac{1}{\left.\frac{dg}{dx}\right|_{y=0}} f(g^{-1}(0)) = \frac{1}{\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x_0}} f(x_0) \tag{8}$$

(ii) 単調減少の場合

$x : -\infty \to \infty$ で $y : \infty \to -\infty$ より

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(g(x)) = \int_{\infty}^{-\infty} dy \frac{1}{\frac{dg}{dx}} f(g^{-1}(y))\delta(y) = \frac{1}{-\left.\frac{dg}{dx}\right|_{y=0}} f(g^{-1}(0)) = \frac{1}{\left|\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x_0}\right|} f(x_0) \tag{9}$$

(8), (9) 式より

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(g(x)) = \frac{1}{\left|\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x_0}\right|} f(x_0) \tag{10}$$

[2] δ 関数を含む積分計算 その 2

Δx を適当な微小量として

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(g(x)) &= \int_{-\infty}^{x_1-\Delta x} dx f(x)\delta(g(x)) + \int_{x_1-\Delta x}^{x_1+\Delta x} dx f(x)\delta(g(x)) + \int_{x_1+\Delta x}^{x_2-\Delta x} dx f(x)\delta(g(x)) \\
&\quad + \int_{x_2-\Delta x}^{x_2+\Delta x} dx f(x)\delta(g(x)) + \cdots + \int_{x_N-\Delta x}^{x_N+\Delta x} dx f(x)\delta(g(x)) + \int_{x_N+\Delta x}^{\infty} dx f(x)\delta(g(x)) \\
&= \int_{-\infty}^{x_1-\Delta x} dx f(x)\delta(g(x)) + \sum_{n=1}^{N} \int_{x_n-\Delta x}^{x_n+\Delta x} dx f(x)\delta(g(x)) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N-1} \int_{x_n+\Delta x}^{x_n-\Delta x} dx f(x)\delta(g(x)) + \int_{x_N+\Delta x}^{\infty} dx f(x)\delta(g(x))
\end{aligned} \tag{11}$$

$g(x) = 0$ は重解がないので、$x_n - \Delta x \leq x \leq x_n + \Delta x$ で g(x) の単調性が保たれていると考えられる。よって前問で証明した (10) 式を用いて

$$\int_{x_n-\Delta x}^{x_n+\Delta x} dx f(x)\delta(g(x)) = \frac{1}{\left|\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x_n}\right|} f(x_n) \quad (n = 1, 2, \cdots, N) \tag{12}$$

$-\infty \leq x \leq x_1 - \Delta x, x_n + \Delta x \leq x \leq x_{n+1} + \Delta x (n = 1, 2, \cdots, N-1), x_N + \Delta x \leq x \leq \infty$ では $g(x) \neq 0$ より

$$\delta(g(x)) = 0 \tag{13}$$

$$\therefore (11), (12), (13) \implies \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x))\delta(g(x)) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\left|\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x_n}\right|} f(x_n) \tag{14}$$

[3] 電磁場のエネルギー、energy flux、運動量、運動量 flux

3-1.

真空中での電磁場の運動量・エネルギー保存を表す式を導出しよう。復習として真空中での Maxwell 方程式たち。
Gauss's law.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho = 0 \tag{15}$$

magnetic Gauss's law.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{16}$$

Faraday's law.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{17}$$

Ampere-Maxwell's law.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{18}$$

さらに諸々の量を定義しておく。

$$U_{\text{field}} = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2) \tag{19}$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{20}$$

$$\mathbf{M}_j = (M_{jx}, M_{jy}, M_{jz}) \tag{21}$$

$$M_{ji} = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2)\delta_{ji} - \frac{1}{4\pi}(E_j E_i + B_j B_i) \tag{22}$$

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c}\mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{23}$$

これらを用いて、ある式を導こう。

$$\frac{\partial U_{\text{field}}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E} \cdot \underbrace{\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}_{(18)} + \mathbf{B} \cdot \underbrace{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}_{(17)}) = \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E} \cdot (c\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot (-c\nabla \times \mathbf{E})\right) = \frac{c}{4\pi}\left(\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})\right) \tag{24}$$

一方、

$$(20) \implies \nabla\cdot\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \frac{c}{4\pi}\left(\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{E}) - \mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})\right) \tag{25}$$

(25) 式の途中で前回のレポートで証明したベクトル恒等式を用いた。

$$\therefore (24),(25) \implies \frac{\partial U_{\text{field}}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{S} = 0 \tag{26}$$

が成立。両辺を体積積分すると U_{field} が電場・磁場により発生する場のエネルギーで、$\mathbf{S}$ がエネルギーフラックスということがわかる。

3-2.

$$\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi c}(\underbrace{\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}}_{(18)}\times\mathbf{B} + \mathbf{E}\times\underbrace{\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}}_{(17)}) = \frac{1}{4\pi c}((c\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} + \mathbf{E}\times(-c\nabla\times\mathbf{E})) = \frac{1}{4\pi}((\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} - \mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{E})) \tag{27}$$

(27) 式の両辺の i 成分のみ書き出す。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_i}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi}(\epsilon_{ijk}(\nabla\times\mathbf{B})_j B_k - \epsilon_{ijk}E_j(\nabla\times\mathbf{E})_k) = \frac{1}{4\pi}(\epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}(\partial_l B_m)B_k - \epsilon_{ijk}E_j\epsilon_{klm}(\partial_l E_m)) \\
&= \frac{1}{4\pi}(\epsilon_{jki}\epsilon_{jlm}(\partial_l B_m)B_k - \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}E_j(\partial_l E_m)) \\
&= \frac{1}{4\pi}((\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il})(\partial_l B_m)B_k - (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})E_j(\partial_l E_m)) \\
&= \frac{1}{4\pi}((\partial_k B_i)B_k - (\partial_i B_k)B_k - E_j(\partial_i E_j) + E_j(\partial_j E_i)) \\
&= \frac{1}{4\pi}\left((\mathbf{B}\cdot\nabla)B_i - \frac{1}{2}\partial_i B^2 - \frac{1}{2}\partial_i E^2 + (\mathbf{E}\cdot\nabla)E_i\right) \qquad (28)
\end{aligned}$$

一方、(21), (22) より

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{M}_j &= \partial_i M_{ji} = \partial_i\left(\frac{1}{8\pi}(E^2+B^2)\delta_{ji} - \frac{1}{4\pi}(E_jE_i + B_jB_i)\right) = \frac{1}{8\pi}\partial_j(E^2+B^2) - \frac{1}{4\pi}\partial_i(E_jE_i + B_jB_i) \\
&= \frac{1}{8\pi}\partial_j(E^2+B^2) - \frac{1}{4\pi}\{E_i(\partial_i E_j) + E_j(\partial_i E_i) + B_i(\partial_i B_j) + B_j(\partial_i B_i)\} \\
&= \frac{1}{8\pi}\partial_j(E^2+B^2) - \frac{1}{4\pi}\{(\mathbf{E}\cdot\nabla)E_j + E_j\underbrace{(\nabla\cdot\mathbf{E})}_{(15)} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)B_j + B_j\underbrace{(\nabla\cdot\mathbf{B})}_{(16)}\} \\
&= \frac{1}{8\pi}\partial_j(E^2+B^2) - \frac{1}{4\pi}((\mathbf{E}\cdot\nabla)E_j + (\mathbf{B}\cdot\nabla)B_j) \qquad (29)
\end{aligned}$$

$$(28),(29) \implies \frac{\partial g_j}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{M}_j = 0 \tag{30}$$

この式は電磁場の運動量の保存を表している。

[4] 電磁場の波動方程式

Maxwell 方程式から電場と磁場が満たす方程式を導出しよう。

$$(17),(18) \implies \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{31}$$

前回のレポートで証明したベクトル恒等式より

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{E})}_{(15)} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} \tag{32}$$

$$(31),(32) \implies \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{33}$$

同様に

$$(17),(18) \implies \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{34}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{B})}_{(16)} - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B} \tag{35}$$

$$(34),(35) \implies \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{B} = \mathbf{0} \tag{36}$$

これは波動方程式の形をしている。とくに

$$\Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{37}$$

をダランベール演算子 (d'Alembertian, ダランベレシアン) をという。

[5] 変位電流項がない場合

Maxwell 方程式から Maxwell の変位電流を落とすと、電場と磁場が満たす方程式の形はどうなるだろうか。Ampere-Maxwell's law はただの Ampere's law となり、

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} = \mathbf{0} \tag{38}$$

となる。

$$\nabla \times (38) = \nabla \times \underbrace{(\nabla \times \mathbf{B})}_{(38)=0} = -\nabla^2 \mathbf{B} = \mathbf{0} \iff \nabla^2 \mathbf{B} = \mathbf{0} \tag{39}$$

$$\nabla \times (17) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\nabla \times \mathbf{B})}_{(38)=0} = \mathbf{0} \iff \nabla^2 \mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{40}$$

となり、波動方程式の形にならない。

[6] ダランベール方程式の球面波解とその性質

6-1.

ダランベール方程式

$$\nabla^2 f(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0 \tag{41}$$

の球面波解について考える。関数 f は動径座標と時刻のみの関数で $f(R,t)$ のように書けるとする。まずは極座標形におけるラプラシアンを導出しよう。任意の関数 $u(R,\theta,\phi)$ に対して、ガウスの定理より

$$\iiint \nabla \cdot \nabla u dV = \iint \nabla u \cdot d\mathbf{S} \tag{42}$$

が成立する。fig1 のように極座標で $(R,\theta,\phi) \sim (R+dR,\theta+d\theta,\phi+d\phi)$ の範囲にある微小体積要素に対して (42) 式を具体的に計算してやることでラプラシアンを求める。

$$\iiint \nabla \cdot \nabla u dV = \iiint \nabla^2 u dV \simeq \nabla^2 u R^2 \sin\theta dR d\theta d\varphi \tag{43}$$

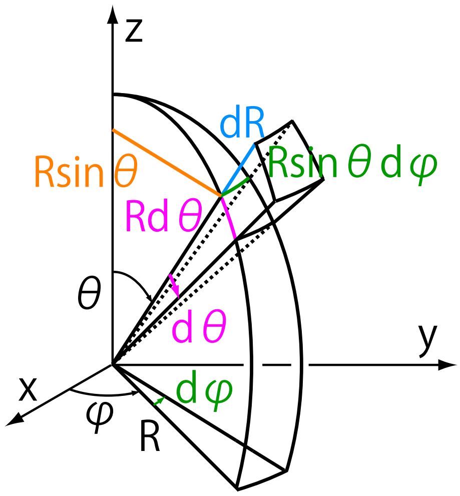

fig 1: 極座標における微小体積要素。

極座標形における gradient の成分

$$\nabla u|_R = \frac{\partial u}{\partial R}, \quad \nabla u|_\theta = \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad \nabla u|_\varphi = \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi} \tag{44}$$

を (42) の右辺に代入して計算する。

$$\begin{aligned}
\iiint \nabla \cdot \nabla u\, dV &= \iint \nabla u \cdot d\mathbf{S} \simeq \frac{\partial u}{\partial R} R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \Big|_R^{R+dR} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} R\sin\theta dR d\varphi \Big|_\theta^{\theta+d\theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi} R dR d\theta \Big|_\varphi^{\varphi+d\varphi} \\
&\simeq \frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial u}{\partial R}\right) dR \sin\theta d\theta d\varphi + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) d\theta dR d\varphi + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} d\varphi dR d\theta \\
&\simeq \left\{\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial u}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right\} R^2 \sin\theta dR d\theta d\varphi
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\therefore (43),(45) \implies \nabla^2 = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{46}$$

(41), (46) 式と $f(R,t)$ は θ,ϕ に依存しないことから

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial f}{\partial R}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \tag{47}$$

となる。

6-2.

(47) 式に

$$f(\mathbf{r},t) = f(R,t) = \frac{U(R,t)}{R} \tag{48}$$

を代入。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{U(R,t)}{R}\right)\right) - c^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{U(R,t)}{R}\right) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\frac{\partial U}{\partial R}R - U}{R^2}\right) - \frac{1}{c^2R}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\
&= \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{\partial U}{\partial R}\right) - \frac{1}{c^2R}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{R}\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2R}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \implies \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0
\end{aligned} \tag{49}$$

6-3.

(49) 式を

$$\begin{cases} \xi = R - ct \\ \eta = R + ct \end{cases} \tag{50}$$

で定義される変数で変形すると

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial R} = \dfrac{\partial\xi}{\partial R}\dfrac{\partial}{\partial\xi} + \dfrac{\partial\eta}{\partial R}\dfrac{\partial}{\partial\eta} = \dfrac{\partial}{\partial\xi} + \dfrac{\partial}{\partial\eta} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial\xi}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial\xi} + \dfrac{\partial\eta}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial\eta} = -c\dfrac{\partial}{\partial\xi} + c\dfrac{\partial}{\partial\eta} \end{cases} \tag{51}$$

より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U(R,t)}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U(R,t)}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2 U(\xi,\eta) - \frac{1}{c^2}\left(-c\frac{\partial}{\partial\xi} + c\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2 U(\xi,\eta) \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)U(\xi,\eta) - \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)U(\xi,\eta) \\
&= 4\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}U(\xi,\eta) = 0 \implies \therefore \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}U(\xi,\eta) = 0
\end{aligned} \tag{52}$$

6-4.

(52) より

$$
\begin{cases}
f(R,t) = \dfrac{g(\xi)}{R} \\[2ex]
f(R,t) = \dfrac{h(\eta)}{R}
\end{cases}
\tag{53}
$$

の 2 つがダランベール方程式の解になっていることを示そう。これらをダランベール方程式に代入して変形した物は (52) 式の $U(\xi,\eta)$ を $g(\xi), h(\eta)$ に置き換えた物に等しい。

$$
\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} g(\xi) = \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} g(\eta) = 0 \tag{54}
$$

は恒等的に成り立つから、(53) 式の 2 つはダランベール方程式の解であることがわかる。

6-5.

では得られた 2 つの解の物理的な考察をしよう。

(i)$f(R,t) = \dfrac{g(\xi)}{R} = \dfrac{g(R-ct)}{R}$ の解の性質

$R=0$ から $t=0$ に発信した情報 (すなわち $g(0)$) が $R=r(>0)$ に到達するのは $t=r/c$ のときである。またその情報は $1/r$ に減衰しているという事を意味する。

(ii)$f(R,t) = \dfrac{h(\eta)}{R} = \dfrac{h(R+ct)}{R}$ の解の性質

$R=0$ で $t=0$ に発信するはずの情報 (すなわち $h(0)$) が $R=r(>0)$ には既に $t=-r/c$ の過去に存在している。またその情報は $R=0$ で $t=0$ に発信するはずの情報の $1/r$ 倍に減衰したものとなっている。これは発信する前に存在している事になるので、因果律に反している。

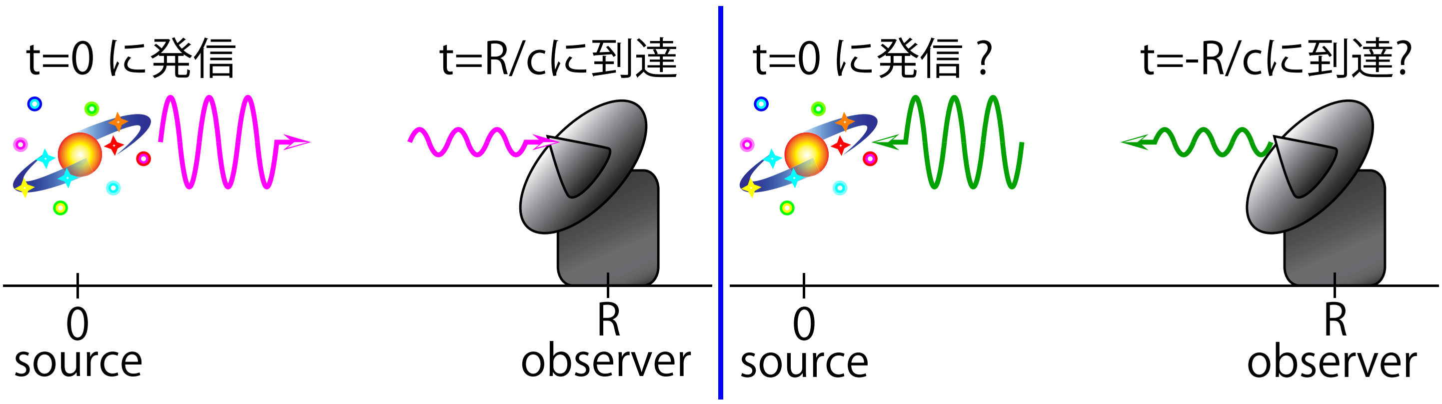

fig 2: ダランベール方程式の解 (i) 左と (ii) 右。

2 つを総合すると

・$f(R,t) = \dfrac{g(R-ct)}{R}$ はある時刻に原点で起こった事象の情報が、原点から外向きの球面波として伝播する解 (物理的に意味のある解)。

・$f(R,t) = \dfrac{h(R+ct)}{R}$ は原点である時刻に起こるはずの事象の情報が、事象が起こる前からはるか遠方より原点に向かって内向きの球面波として伝播する解 (これから起こるはずの事象の情報が伝播してきているから、物理的に意味のない解)。

6-6.

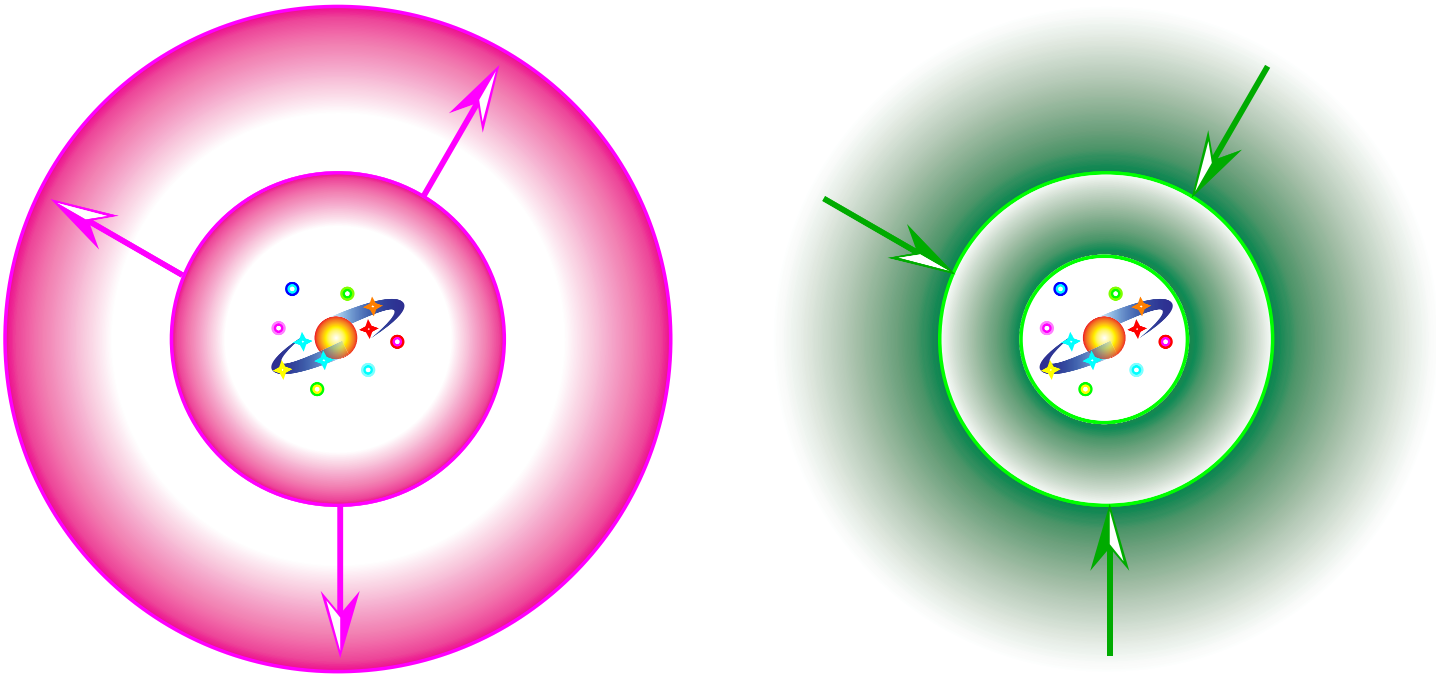

fig 3: 波源から出た球面波の伝播方向には、外向きの解と内向きの解がある。

[5] で得られた (40) 式に $\mathbf{E} = \dfrac{\mathbf{u}(R,t)}{R}$ を代入

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial R}\right) = \mathbf{0} \implies R^2 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial R} = \mathbf{C}(\text{定ベクトル}) \implies \mathbf{E} = \frac{\mathbf{C_1}}{R} + \mathbf{C}_2 \tag{55}$$

$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ ともに定ベクトルである。(39) 式の $\mathbf{B}$ も同様にして

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{C}_3}{R} + \mathbf{C}_4 \tag{56}$$

よって $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ ともに時間に依存しない形となる。

[7] D'Alamberatian と Green 関数

関数 ϕ が

$$\Box \phi(\mathbf{r}, t) = -4\pi \rho_e(\mathbf{r}, t) \tag{57}$$

を満たすとする。このとき、

$$\Box\, G(\mathbf{r}, t) = -\delta^3(\mathbf{r})\delta(t) \tag{58}$$

を満たす関数 G(Green function) を用いて ϕ を求めてみよう。

$$\begin{aligned} 4\pi \iiint d\mathbf{r}' \int dt' \Box\, G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')\rho_e(\mathbf{r}', t') &\underbrace{=}_{(58)} -4\pi \iiint d\mathbf{r}' \int dt' \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')\rho_e(\mathbf{r}', t') \\ &= -4\pi\rho_e(\mathbf{r}, t) \underbrace{=}_{(57)} \Box\phi(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \tag{59}$$

一方、$\Box$ は $\mathbf{r}, t$ に作用する演算子より

$$4\pi \iiint d\mathbf{r}' \int dt' \Box\, G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')\rho_e(\mathbf{r}', t') = \Box \left(4\pi \iiint d\mathbf{r}' \int dt' G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')\rho_e(\mathbf{r}', t') \right) \tag{60}$$

$$\therefore\ \phi = 4\pi \iiint d\mathbf{r}' \int dt' G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')\rho_e(\mathbf{r}', t') \tag{61}$$