08 Report 13 answer. (presented by Sho Nakamura)

update:16/Apr/2011

[1] Sunyaev-Zel'dovich(SZ) effect

Sunyaev-Zel'dovich(SZ) 効果について考えよう。CMB は温度 $T = 2.73\text{K}$ の黒体放射であり、その放射強度スペクトル (単位時間・単位面積・単位立体角・単位周波数当たりの放射のエネルギー) は

$$I_\nu = \frac{2h}{c^2}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1} \tag{1}$$

で与えられており、宇宙には CMB フォトンが一様等方に満ちている。

1-1.

(1) 式には最大となる周波数がある。$x = \dfrac{h\nu}{k_BT}$ とおいて

$$I_\nu(x) = \frac{2h}{c^2}\left(\frac{k_BT}{h}\right)^3 \underbrace{\frac{x^3}{e^x-1}}_{\equiv f(x)} \tag{2}$$

の $f(x)$ の最大となるところを求めればよい。

$$\frac{df}{dx} = \frac{3x^2(e^x-1)-x^3e^x}{e^x-1} = x^2\frac{3(e^x-1)-xe^x}{e^x-1} \tag{3}$$

よって $3(e^x-1)-xe^x = 0$ を解けばよい … しかし、解析的にこの式を解く方法は見つからなかったので、数値計算に頼ることにする。新たに $g(x) \equiv 3(e^x-1)-xe^x$ とおいて $\dfrac{dg}{dx}$ を計算し、Newton 法を用いて数値計算する。すると $g(x) \sim 0$ の解は $x \sim 2.82$ となることがわかる。

$$\therefore\ h\nu \simeq 2.82k_BT \tag{4}$$

これを Wien の偏移則と呼ぶ。ここに実際に CMB フォトンの温度を代入して周波数を計算すると

$$\nu \simeq \frac{2.82c}{2\pi\hbar c}\left\{\left(\frac{2.73\text{K}}{10^4\text{K}}\right)\text{eV}\right\} \simeq \frac{1.4\times10^{10}\text{cm s}^{-1}}{200\ \text{MeV}\cdot\text{fm}}2.7\times10^{-4}\ \text{eV} \simeq 0.7\times2.7\times10^{11}\ (\text{s}^{-1}) \sim 200(\text{GHz}) \tag{5}$$

厳密に物理定数を関数電卓で計算すると 160GHz くらいになる。

1-2.

Rayleigh-Jeans limit $(h\nu \ll k_BT)$ のとき、$e^x \simeq 1+x\ (x \ll 1)$ より

$$I_\nu \simeq \frac{2h}{c^2}\frac{\nu^3}{\left(1+\frac{h\nu}{k_BT}\right)-1} = \frac{2k_BT\nu^2}{c^2} \tag{6}$$

1-3.

以下 Rayleigh-Jeans limit で考える。CMB が温度 $k_B T_e = 10\mathrm{keV}$、密度 $n_e = 10^{-3}\mathrm{cm}^{-3}$、半径 $L = 1\mathrm{Mpc}$ のプラズマガス球領域 (銀河団プラズマを想定) を通過したとする。CMB フォトンが電子により逆コンプトン散乱を受けると強度 I_ν はどうなるだろうか。

$\nu \sim \nu + \Delta\nu$ にいるフォトン数は $\dfrac{I_\nu}{h\nu}\Delta\nu$ と書ける。同様に $\nu' \sim \nu' + \Delta\nu'$ にいるフォトン数も $\dfrac{I_{\nu'}}{h\nu'}\Delta\nu'$ と書ける ($\nu > \nu'$)。$\nu' \sim \nu' + \Delta\nu'$ のフォトンの内の何割かが逆コンプトン散乱により $\nu \sim \nu + \Delta\nu$ のフォトンの仲間入りを果たす。しかし、$\nu \sim \nu + \Delta\nu$ に元々いたフォトンの何割かも逆コンプトン散乱により $\nu \sim \nu + \Delta\nu$ の内から出て行ってしまう。逆コンプトン散乱をうける確率は optical depth

$$\tau_{\mathrm{es}} = \frac{L}{\text{mean free pass}} = \sigma_{\mathrm{T}} n_e L \simeq 2 \times 10^{-3} \left(\frac{n_e}{10^{-3}\mathrm{cm}^{-3}}\right)\left(\frac{L}{1\mathrm{Mpc}}\right) \tag{7}$$

によって決まり、フォトンのエネルギー (電磁波の周波数) には関係しない。よってこのガス雲を抜けたあとの強度変化を ΔI_ν とおくとフォトン数の変化は Rayleigh-Jeans limit (6) 式より

$$\frac{\Delta I_\nu}{h\nu}\Delta\nu = \left(\frac{I_{\nu'}}{h\nu'}\Delta\nu' - \frac{I_\nu}{h\nu}\Delta\nu\right)\tau_{\mathrm{es}} \implies \Delta I_\nu = \left(\frac{\Delta\nu'\nu}{\Delta\nu}\frac{I_{\nu'}}{I_\nu} - 1\right) I_\nu \tau_{\mathrm{es}} = \left(\frac{\Delta\nu'}{\Delta\nu}\frac{\nu'}{\nu} - 1\right) I_\nu \tau_{\mathrm{es}} \tag{8}$$

$h\nu'$ から $h\nu$ になったフォトンのエネルギーの関係式は、前回のレポートで求めた非相対論的な電子の逆コンプトン散乱によるフォトンのエネルギー変化率の平均値を用いて

$$h\nu'\left(1 + \left\langle\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right\rangle\right) = h\nu \tag{9}$$

と書けるので

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{1 + \left\langle\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right\rangle} \simeq 1 - \left\langle\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right\rangle \tag{10}$$

同様に $h(\nu' + \Delta\nu')$ から $h(\nu + \Delta\nu)$ になったフォトンのエネルギーの関係式は

$$\begin{aligned} &h(\nu' + \Delta\nu')\left(1 + \left\langle\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right\rangle\right) = h(\nu + \Delta\nu) \implies \left(1 + \left\langle\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right\rangle\right)\nu' + \left(1 + \left\langle\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right\rangle\right)\Delta\nu' = \nu + \Delta\nu \\ &\underbrace{\implies}_{(9)} \left(1 + \left\langle\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right\rangle\right)\Delta\nu' = \Delta\nu \implies \frac{\Delta\nu'}{\Delta\nu} = \frac{1}{1 + \left\langle\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right\rangle} \simeq 1 - \left\langle\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right\rangle \end{aligned} \tag{11}$$

$$\therefore (8), (10), (11) \implies \Delta I_\nu \simeq \left\{\left(1 - \left\langle\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right\rangle\right)^2 - 1\right\} I_\nu \tau_{\mathrm{es}} \simeq -2\left\langle\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right\rangle I_\nu \tau_{\mathrm{es}} = -2y I_\nu \tag{12}$$

ここで

$$y \equiv \left\langle\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right\rangle \tau_{\mathrm{es}} \simeq 8 \times 10^{-5}\left(\frac{k_B T}{5\mathrm{keV}}\right)\left(\frac{n_e}{10^{-3}\mathrm{cm}^{-3}}\right)\left(\frac{L}{1\mathrm{Mpc}}\right) \tag{13}$$

はコンプトン y パラメータと呼ばれ、逆コンプトン散乱による光子系全体の平均のエネルギー変化率を表すものである。今の場合、プラズマガス球中心部での値は $y \sim 1.6 \times 10^{-4}$ である。

[2] Cherenkov radiation

Cherenkov radiation について考えよう。屈折率 $n_r (n_r > 1)$ の一様媒質中を等速直線運動する電荷 q の荷電粒子が作る速度場について考える。

2-1.

真空中を伝播する電磁波の 4 元ポテンシャルが満たす方程式は

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho_e \\ \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\dfrac{4\pi}{c} \mathbf{j}_e \end{cases} \tag{14}$$

であった。但し、ここで 4 元ポテンシャルが Lorentz gauge

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{15}$$

を満たすように選択した。屈折率 n_r の一様媒質中を伝播する伝播する電磁波の満たす方程式と Lorentz condition に対応する条件を真空中での結果から類推しよう。
屈折率 n_r の一様媒質中においては光速度が $c \to \dfrac{c}{n_r}$ となる。この置き換えをすればよい。

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi - \dfrac{n_r^2}{c^2} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho_e \\ \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \dfrac{n_r^2}{c^2} \dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\dfrac{4\pi n_r}{c} \mathbf{j}_e \end{cases} \tag{16}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{n_r}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{17}$$

2-2.

Lienard-Wiechert potential より導かれる、真空中を等速直線運動する荷電粒子が作る電場は

$$\begin{cases} \mathbf{E} = q \left[\dfrac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2)}{\kappa^3 R^2} \right] \\ \\ \boldsymbol{\beta} = \dfrac{\mathbf{v}}{c} \\ \\ \kappa = 1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} \end{cases} \tag{18}$$

であった (等速直線運動なので輻射場は考えない)。では屈折率 n_r の一様媒質中を等速直線運動する荷電粒子が作る速度場はどうなるだろうか。
コレも先ほどと同様の類推で片付く。$\boldsymbol{\beta} = \dfrac{\mathbf{v}}{c} \to \dfrac{n_r \mathbf{v}}{c} = n_r \boldsymbol{\beta}$ と置き換えるだけでよい。

$$
\begin{cases}
\mathbf{E} = q\left[\dfrac{(\mathbf{n}-n_r\boldsymbol{\beta})(1-n_r^2\beta^2)}{\kappa^3 R^2}\right] \\[2ex]
\boldsymbol{\beta} = \dfrac{\mathbf{v}}{c} \\[2ex]
\kappa = 1 - n_r \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}
\end{cases}
\tag{19}
$$

2-3.

$n_r > 1$ のとき、$\kappa = 0$ となる $\mathbf{n}, \boldsymbol{\beta}$ のなす角 θ が存在する。$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta} = \beta\cos\theta$ を (19) 式に代入して

$$
\kappa = 1 - n_r\beta\cos\theta = 0 \iff \cos\theta = \frac{1}{n_r\beta} \;\left(\theta = \cos^{-1}\frac{1}{n_r\beta}\right)
\tag{20}
$$

この角度を臨界角と呼ぶ。

2-4.

臨界角上では $\mathbf{n}\cdot\mathbf{E} = 0$ となることを示そう。$\kappa = 0$ のとき (19) 式より $|\mathbf{E}| = \infty$ である。よって $\mathbf{E}$ の向きだけ考えると

$$
\mathbf{n}\cdot(\mathbf{n} - n_r\boldsymbol{\beta}) = 1 - n_r\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta} = \kappa = 0
\tag{21}
$$

よって $\mathbf{n}$ と $\mathbf{E}$ は直交する。

2-5.

屈折率の 1 からのズレを Δn_r と書く。すなわち $n_r = 1 + \Delta n_r$ のように書く。$\Delta n_r \ll 1$ のとき、$\kappa = 0$ を満たす θ が存在するために荷電粒子の Lorentz factor γ が満たすべき条件は何だろうか。

$$
\begin{aligned}
\cos\theta = \frac{1}{(1+\Delta n_r\beta)} < 1 \iff \beta > \frac{1}{1+\Delta n_r} \simeq 1 - \Delta n_r \\
\therefore \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > \frac{1}{\sqrt{1-(1-\Delta n_r)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\Delta n_r + \Delta n_r^2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\Delta n_r}}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

空気の屈折率は $n_r = 1.0003$ である。この場合について具体的に γ の条件を計算してみると

$$
\gamma > \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3\times 10^{-4}}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\times 10^2 \sim 41
$$

2-6.

(22) 式が満たされているとき、臨界角 θ を $\Delta n_r, \gamma$ を用いて表してみよう。ただし $\theta \ll 1, \gamma \gg 1, \Delta n_r \ll 1$ とする。

$$
\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \iff \beta = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^{-2}}}
\tag{23}
$$

$$
(20), (23) \implies \cos\theta = \frac{1}{(1+\Delta n_r)\sqrt{1-\gamma^{-2}}}
$$

$\theta \ll 1, \gamma \gg 1$ より $\cos\theta \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2, \sqrt{1-\gamma^{-2}} \simeq 1 + \frac{1}{2\gamma^2}$

$$\therefore 1 - \frac{1}{2}\theta^2 \simeq (1 - \Delta n_r)\left(1 + \frac{1}{2\gamma^2}\right) \simeq 1 + \frac{1}{2\gamma^2} - \Delta n_r \implies \theta \simeq \sqrt{2\Delta n_r - \frac{1}{\gamma^2}} \tag{24}$$

2-7.

$\gamma \gg \Delta n_r$ のとき (24) 式より $\theta \simeq \sqrt{2\Delta n_r}$。これを空気の場合に適応すると $\theta_{\mathrm{air}} \sim \sqrt{6} \times 10^{-2} \sim 2.4 \times 10^{-2}$。非常に小さい。

[3] Synchrotron energy minimum と電波天文学でよく使われる Jy 単位

磁場の方向がランダムに向いて分布している天体からの Synchrotron 放射を考えよう。このとき、視線方向と磁場の方向関係は 4π steradian 全ての可能性が等方的に現れる。したがって、この天体からの Synchrotron 放射強度は天体を観測する方向によらず等方的であり、以前にレポートで求めた視線方向に対して平均化された放射強度が実際に観測される放射強度となる。以前のレポートでは、電子は磁場と垂直な平面内を円運動している場合について行い

$$P_e(\omega, \mathbf{n}) = \frac{\sqrt{3}e^3 B N_0 \gamma_0^{p-1}}{8\pi^2 m_e c^2 (p+1)} \left(\frac{m_e c\omega}{3eB}\right)^{-\frac{p-1}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{p}{4} - \frac{1}{12}\right) \tag{25}$$

という結果を得た。この計算では電子は

$$N(\gamma)\, d\gamma = N_0 \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^{-p} \frac{d\gamma}{\gamma_0} \tag{26}$$

という power law(ベキ乗型の) エネルギー分布をしているとした。電子の運動が等方的とすると磁場に対して様々なピッチ角の電子からの放射の平均を観測していることになる。ピッチ角 α の電子からの放射は (25) 式の B を $B\sin\alpha$ に置き換えることで得られる。このようにして得られた式に

$$\frac{1}{4\pi}\sin\alpha\, d\alpha \cdot 2\pi = \frac{1}{2}\sin\alpha\, d\alpha \tag{27}$$

をかけてピッチ角で平均すれば、等方分布をした電子からの放射強度が得られる。ここで 2π は被積分関数が方位角に依存しないことから方位角積分したときに出てくることからきている。実際に計算してみる $\cdots$ がここは特殊関数の公式に頼ろう。

$$\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin\alpha \sin^{\frac{p+1}{2}}\alpha\, d\alpha \simeq \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p+5}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+7}{4}\right)} \tag{28}$$

(25), (28) 式より、単位周波数あたりの放射強度は

$$\begin{aligned}
\epsilon_\omega &= \int_0^\pi \frac{1}{2} P_e(\omega, \mathbf{n}) \sin\alpha\, d\alpha \\
&\underbrace{=}_{(25)} \int_0^\pi \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}e^3 N_0 \gamma_0^{p-1}}{8\pi^2 m_e c^2 (p+1)} \left(\frac{m_e c\omega}{3e}\right)^{-\frac{p-1}{2}} B^{\frac{p+1}{2}}\Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{p}{4} - \frac{1}{12}\right) \sin\alpha \sin^{\frac{p+1}{2}}\alpha\, d\alpha
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}e^3 N_0 \gamma_0^{p-1}}{8\pi^2 m_e c^2} \left(\frac{3e}{m_e c\omega}\right)^{\frac{p-1}{2}} B^{\frac{p+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{4}+\frac{19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{p}{4}-\frac{1}{12}\right)}{p+1} \underbrace{\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin\alpha \sin^{\frac{p+1}{2}}\alpha \, d\alpha}_{(28)}$$

$$\simeq \frac{\sqrt{3}e^3 N_0 \gamma_0^{p-1}}{8\pi^2 m_e c^2} \left(\frac{3e}{m_e c\omega}\right)^{\frac{p-1}{2}} B^{\frac{p+1}{2}} \underbrace{\frac{\Gamma\left(\frac{p}{4}+\frac{19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{p}{4}-\frac{1}{12}\right)}{p+1} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{p+5}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+7}{4}\right)}}_{\equiv a(p)}$$

$$\underbrace{=}_{\omega=2\pi\nu} \frac{\sqrt{3}e^3 N_0 \gamma_0^{p-1}}{8\pi^2 m_e c^2} \left(\frac{3e}{2\pi m_e c}\right)^{\frac{p-1}{2}} a(p) B^{\frac{p+1}{2}} \nu^{-\frac{p-1}{2}}$$

$\epsilon_\nu d\nu = \epsilon_\omega d\omega = 2\pi\epsilon_\omega d\nu$ より $\epsilon_\nu = 2\pi\epsilon_\omega$ として

$$\epsilon_\nu = \frac{\sqrt{3}e^3 N_0 \gamma_0^{p-1}}{4\pi m_e c^2} \left(\frac{3e}{2\pi m_e c}\right)^{\frac{p-1}{2}} a(p) B^{\frac{p+1}{2}} \nu^{-\frac{p-1}{2}} \tag{29}$$

$$a(p) \equiv \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{4}+\frac{19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{p}{4}-\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{p+5}{4}\right)}{(p+1)\Gamma\left(\frac{p+7}{4}\right)} \tag{30}$$

である。(26) 式が単位体積あたりの電子数を与えるとすれば、(29) 式は単位体積あたりの Synchrotron 放射強度を与える。ここで天体の体積を V とし、天体の平均の磁場強度、相対論的電子の密度が天体内で一様とすると、この天体からの周波数 ν における全放射強度は

$$L_\nu = \epsilon_\nu V$$

となる。

Synchrotron 放射強度は磁場強度と相対論的電子の個数密度の積に比例しており、強度観測のみからは天体の磁場強度と相対論的電子の個数密度がそれぞれどのような割合になっているかを求めることはできない。そこで「時間が十分に経っており、すでに平衡状態に落ち着いて最小のエネルギー状態になっている」という仮定に基づく Energy minimum の議論を用いて、Sychrotron 放射強度の観測結果のみからこれらの情報を引き出す方法を以下の手順で求めていこう。天体内の相対論的電子の全エネルギーが以下の式は与えられる。

$$W_e = \frac{N_0 V \gamma_0 m_e c^2}{p-2}\left[\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\right)^{-p+2} - \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_0}\right)^{-p+2}\right] = G(p,\nu) L_\nu B^{-\frac{p+1}{2}} \tag{31}$$

ここで

$$G(p,\nu) \equiv \frac{4\pi(m_e c^2)^2}{\sqrt{3}e^3} \left(\frac{3e}{2\pi m_e c}\right)^{-\frac{p-1}{2}} \frac{1}{a(p)(p-2)} ({\gamma_1}^{-p+2} - {\gamma_2}^{-p+2}) \nu^{\frac{p-1}{2}} \tag{32}$$

である。

3-1.

観測から決定される Synchrotron 全放射強度 L_ν を一定に保ち、相対論的電子と磁場の全エネルギー

$$W_{\rm tot} = G(p,\nu) L_\nu B^{-\frac{p+1}{2}} + \frac{B^2}{8\pi} V \tag{33}$$

を最小にする磁場強度 $B_{\rm min}$ は (33) 式を B で微分すれば求まる。

$$\frac{dW_{\rm tot}}{dB}=-\frac{p+1}{2}G(p,\nu)L_\nu B^{-\frac{p+3}{2}}+\frac{V}{4\pi}B=0\implies B_{\rm min}=\left(\frac{2\pi(p+1)G(p,\nu)L_\nu}{V}\right)^{\frac{2}{p+5}} \tag{34}$$

3-2.

$B=B_{\rm min}$ のとき

$$\begin{aligned}(31)\implies W_e &= G(p,\nu)L_\nu\left(\frac{2\pi(p+1)G(p,\nu)L_\nu}{V}\right)^{-\frac{p+1}{p+5}}=G(p,\nu)^{\frac{4}{p+5}}L_\nu^{\frac{4}{p+5}}\left(\frac{2\pi(p+1)}{V}\right)^{-\frac{p+1}{p+5}}\\ &= \left(\frac{2\pi(p+1)}{V}\right)^{-\frac{p+1}{p+5}}\left(\frac{2\pi(p+1)}{V}\right)^{-\frac{4}{p+5}}\underbrace{\left(\frac{2\pi(p+1)G(p,\nu)L_\nu}{V}\right)^{\frac{4}{p+5}}}_{=B_{\rm min}^2}\\ &= \frac{V}{2\pi(p+1)}B_{\rm min}^2=\frac{4}{p+1}W_B\ \left(W_B=\frac{B^2}{8\pi}V\right)\end{aligned} \tag{35}$$

3-3.

我々から距離 $r=100\mathrm{Mpc}$ にある半径 1MPc の球状天体を観測したとしよう。この天体は平衡状態に落ち着いており、系の全エネルギーが最小の状態にある、すなわち磁場強度が $B_{\rm min}$ であるとする。$B_{\rm min}=1\mu G$ のとき、$\nu=1\mathrm{GHz}$ で観測したときの Flux density

$$F_\nu=\frac{L_\nu}{4\pi r^2}$$

を求めてみよう。ただし $p=3,\gamma_1=10^2,\gamma_2=10^5$ とする。

$$(31),(35)\implies W_e=G(p,\nu)L_\nu B_{\rm min}^{-\frac{p+1}{2}}=\frac{V}{2\pi(p+1)}B_{\rm min}^2\iff L_\nu=\frac{V}{2\pi(p+1)G(p,\nu)}B_{\rm min}^{\frac{p+5}{2}}$$

$$\therefore F_\nu=\frac{V}{8\pi^2(p+1)G(p,\nu)r^2}B_{\rm min}^{\frac{p+5}{2}} \tag{36}$$

諸々の値を代入して計算してみよう。

$$(32)\implies G(3,1\mathrm{GHz})=\frac{4\pi(m_ec^2)^2}{\sqrt{3}e^3}\left(\frac{3e}{2\pi m_ec}\right)^{-1}\frac{1}{a(3)}(10^{-2}-10^{-5})\ 1\ \mathrm{GHz}=\frac{8\pi^2}{3\sqrt{3}a(3)}\frac{(m_ec^2)^3}{e^4c}(10^{-2}-10^{-5})10^9\mathrm{Hz}$$

$$\frac{(m_ec^2)^3}{e^4c}=\frac{(m_ec^2)^3}{\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2(\hbar c)^2c}\sim\frac{(500\mathrm{keV})^3}{\left(\frac{200\mathrm{MeV\cdot fm}}{140}\right)^2 3\times10^{10}\mathrm{cm}}=\frac{125\times10^{15}\mathrm{eV}^3}{\left(\frac{10}{7}\times10^{-7}\mathrm{eV\ cm}\right)^2 3\times10^{10}\mathrm{cm}}=\frac{49\times125}{3}\times10^{17}\ (\mathrm{eV\ cm^{-3}\ s})$$

より

$$G(3,1\mathrm{GHz})=\frac{8\pi^2}{9\sqrt{3}}\frac{49\times125}{a(3)}\times10^{17}(10^{-2}-10^{-5})10^9\ (\mathrm{eV\ cm^{-3}})\simeq\frac{8\pi^2}{9\sqrt{3}}\frac{49\times125}{a(3)}\times10^{24}\times1.6\times10^{-12}(\mathrm{erg\ cm^{-3}})$$

$$a(3)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma(2)}{4\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\underbrace{=}_{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{6}\sim0.27$$

$$\therefore G(3, 1\mathrm{GHz}) \sim 1.8 \times 10^{17}\ (\mathrm{erg\ cm^{-3}}) \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
(36), (37) \implies F_\nu &= \frac{\frac{4\pi}{3}(10^6 \times 3 \times 10^{18}\ \mathrm{cm})^3}{8\pi^2 \times 4 \times 1.8 \times 10^{17}\ \mathrm{erg\ cm^{-3}}(100 \times 10^6 \times 3 \times 10^{18}\mathrm{cm})^2}(10^{-6}\mathrm{G})^4 \\
&\sim 2.2 \times 10^{-23}\ (\mathrm{cm^4\ G^4\ erg^{-1}}) \underbrace{=}_{\mathrm{G^2 = erg\ cm^{-3}}} 2.2 \times 10^{-23}\ (\mathrm{erg\ cm^{-2}\ s^{-1}\ Hz^{-1}}) \\
&= 2.2\ (\mathrm{Jy}) \qquad (38)
\end{aligned}$$

途中の計算はかなり大雑把に片付けたが、関数電卓ではじき出した答えもこの程度のオーダーになるはずである。