08 Report 12 answer. (presented by Sho Nakamura)

update:16/Apr/2011

[1] Compton scattering

コンプトン散乱について考える。fig1 のように高エネルギー光子と静止していた電子が衝突し、光子が散乱を受けたとする。衝突前の光子のエネルギーを ϵ、衝突後の光子のエネルギーを ϵ_1 としよう。前者と後者にはどのような関係があるだろうか。衝突前後の光子と電子の 4 元運動量を用いてその関係を導く。

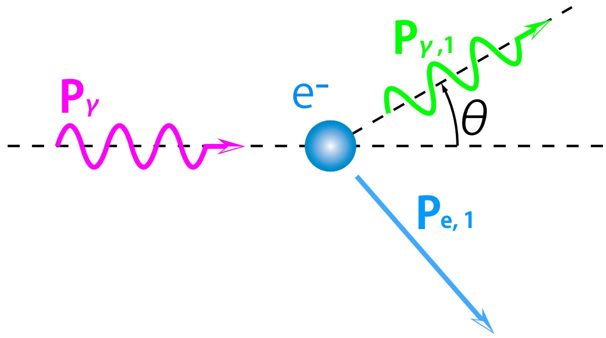

fig 1: 静止した電子による光子の散乱。

$$\text{衝突前}\begin{cases}\text{photon} & P_1^\mu = \left(\dfrac{\epsilon}{c}, \dfrac{\epsilon}{c}\mathbf{e}_x\right) \\[2ex] \text{electron} & P_2^\mu = \left(\dfrac{E_2}{c}, \mathbf{0}\right)\end{cases} \implies \text{衝突後}\begin{cases}\text{photon} & P_3^\mu = \left(\dfrac{\epsilon_1}{c}, \mathbf{p}_3\right) \\[2ex] \text{electron} & P_4^\mu = \left(\dfrac{E_4}{c}, \mathbf{p}_4\right)\end{cases} \tag{1}$$

衝突前の電子は静止していたので

$$c^2 P_2^\mu P_{2\mu} = E_2^2 = m_e^2 c^4 \implies \frac{E_2}{c} = m_e c \tag{2}$$

光子は massless より

$$c^2 P_{3\mu} P_3^\mu = \epsilon_1^2 - c^2 p_3^2 = 0 \iff p_3 = \frac{\epsilon_1}{c} \tag{3}$$

よって光子が fig1 のように θ 方向に散乱されたとすれば

$$\mathbf{p}_3 = \left(\frac{\epsilon_1}{c}\cos\theta, \frac{\epsilon_1}{c}\sin\theta, 0\right) \tag{4}$$

$$\therefore (1) \sim (4) \implies \begin{cases}\text{photon} & P_1^\mu = \left(\dfrac{\epsilon}{c}, \dfrac{\epsilon}{c}\mathbf{e}_x\right) \\[2ex] \text{electron} & P_2^\mu = (m_e c, \mathbf{0})\end{cases} \begin{cases}\text{photon} & P_3^\mu = \left(\dfrac{\epsilon_1}{c}, \dfrac{\epsilon_1}{c}\cos\theta, \dfrac{\epsilon_1}{c}\sin\theta, 0\right) \\[2ex] \text{electron} & P_4^\mu = \left(\dfrac{E_4}{c}, \mathbf{p}_4\right)\end{cases} \tag{5}$$

4 元運動量の保存より

$$P_1^\mu + P_2^\mu = P_3^\mu + P_4^\mu \iff P_4^\mu = P_1^\mu + P_2^\mu - P_3^\mu$$

(5) 式より、両辺の内積を取って

$$\underbrace{c^2P_4^\mu P_{4\mu}}_{=m_e^2c^4} = \underbrace{c^2P_1^\mu P_{1\mu}}_{=0} + \underbrace{c^2P_2^\mu P_{2\mu}}_{=m_e^2c^4} + \underbrace{c^2P_3^\mu P_{3\mu}}_{=0} + 2\underbrace{c^2P_1^\mu P_{2\mu}}_{=m_ec^2\epsilon} - 2\underbrace{c^2P_2^\mu P_{3\mu}}_{=m_ec^2\epsilon_1} - 2\underbrace{c^2P_3^\mu P_{1\mu}}_{=\epsilon\epsilon_1-\epsilon\epsilon_1\cos\theta}$$

$$\iff \epsilon_1(m_ec^2+\epsilon-\epsilon\cos\theta)-m_ec^2\epsilon=0 \implies \epsilon_1=\frac{\epsilon}{1+\frac{\epsilon}{m_ec^2}(1-\cos\theta)} \tag{6}$$

この関係を波長で書くと $\epsilon = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}$ より

$$\frac{hc}{\lambda_1} = \frac{\frac{hc}{\lambda}}{1+\frac{1}{m_ec^2}\frac{hc}{\lambda}(1-\cos\theta)} = \frac{hc}{\lambda}\frac{1}{1+\frac{\lambda_c}{\lambda}(1-\cos\theta)} = \frac{hc}{\lambda+\lambda_c(1-\cos\theta)} \implies \lambda_1-\lambda=\lambda_c(1-\cos\theta) \tag{7}$$

である。ここで途中で定義した

$$\lambda_c \equiv \frac{h}{m_ec} = 2\pi\frac{\hbar c}{m_ec^2} \sim 6\frac{200\ \mathrm{MeV}\cdot\mathrm{fm}}{0.5\ \mathrm{MeV}} \sim 2400(\mathrm{fm}) = 2.4\times10^{-10}(\mathrm{cm}) = 2.4\times10^{-2}(\mathring{A}) \tag{8}$$

をコンプトン波長と呼ぶ。

[2] inverse Compton scattering

次は逆コンプトン散乱について考える。fig3 のように x 方向に運動する電子と光子との散乱を考える。以下、実験室系 (観測者系) を K 系とし、衝突前の電子の静止系を K' 系とする。K' 系での物理量には' をつける。また K' 系では $\epsilon' \ll m_ec^2$ とする。衝突前の電子の速度を v とする。

2-1.

K 系で速度 v で運動する電子と観測者についてから考えよう。電子が時刻 $t\sim t+dt$ 間に放出した電磁波を観測者は時間間隔 dt_{obs} で受け取る。では、dt_{obs} と dt の関係式を求めよう。観測者が実際に電磁波を受け取った時刻を $t_{\mathrm{obs}}\sim t+dt_{\mathrm{obs}}$ に受け取ったとする。時刻 t における電子と観測者の距離を L とすると

$$t_{\mathrm{obs}} = t+\frac{L}{c}$$

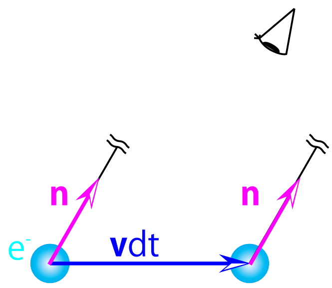

fig 2: Doppler effect

観測者が無限遠におり、dt が微小と考えると、電子から観測者の方向を向く単位ベクトル $\mathbf{n}$ に変化はないとして

$$t_{\mathrm{obs}}+dt_{\mathrm{obs}} = t+dt+\left(\frac{L}{c}-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}dt}{c}\right)$$

$$\therefore dt_{\mathrm{obs}} = dt-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}dt}{c} = (1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})dt \tag{9}$$

これは Doppler shift の公式そのものである。

2-2.

dt を K' 系で測定した時間間隔を dt' とする。今度は dt', dt の関係を求めよう。x 方向に速度 v で移動する系 (K' 系) へのローレンツ変換より

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct - \gamma\beta x \\ -\gamma\beta ct + \gamma x \end{pmatrix}$$

電子と一緒に速度 v で移動する系に移っているので $x' = 0$ である。よって

$$\begin{cases} ct' = \gamma ct - \gamma\beta x \\ x = \beta ct \end{cases} \iff ct' = \gamma ct - \gamma\beta^2 ct = \gamma ct(1-\beta^2) = \frac{ct}{\gamma}$$

$$\therefore\ dt' = \frac{dt}{\gamma} \tag{10}$$

2-3.

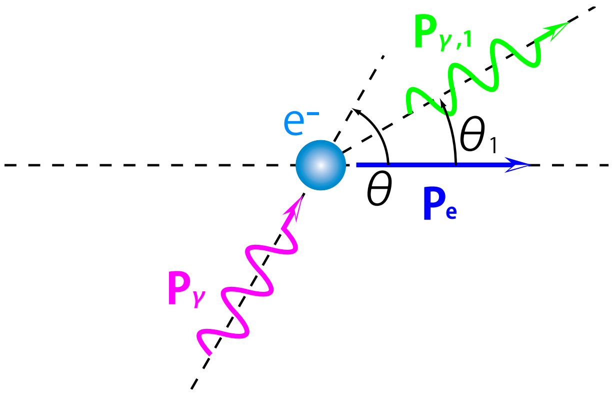

fig 3: K 系。

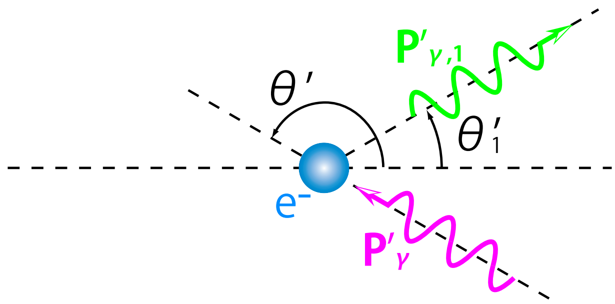

fig 4: K' 系。

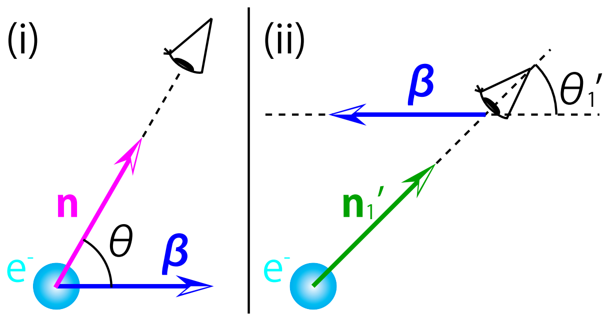

fig 5: K 系 (i) と K' 系 (ii) での観測者との相対関係。

dt を放出した電磁波の一周期と考えてみよう。
(i) K 系において観測者が光子の散乱前の直進方向にいるとき、すなわち $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta} = \beta\cos\theta$ のとき

$$\epsilon = h\nu = \frac{h}{dt_{\mathrm{obs}}} \underbrace{=}_{(9)} \frac{h}{(1-\beta\cos\theta)dt} \underbrace{=}_{(10)} \frac{1}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}\frac{h}{dt'} = \frac{1}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}h\nu' = \frac{1}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}\epsilon'$$

$$\therefore\ \epsilon' = \gamma(1-\beta\cos\theta)\epsilon \tag{11}$$

(ii) K' 系において観測者が散乱後の光子の直進方向にいるとき、すなわち $\mathbf{n}'_1\cdot\boldsymbol{\beta} = -\beta\cos\theta'_1$ のとき、散乱後の物理量に添字 1 をつけて考えると

$$\epsilon_1' = h\nu_1' = \frac{h}{dt'_{\rm obs1}} \underbrace{=}_{(9)} \frac{h}{(1+\beta\cos\theta_1')dt_1'} \tag{12}$$

今度は電子と一緒に速度 v で移動する K' 系から観測者が静止している K 系に移る。(10) 式と関係が逆転するだけで

$$dt_1 = \frac{dt_1'}{\gamma} \tag{13}$$

$$(12) \underbrace{\Longrightarrow}_{(13)} \epsilon_1' = \frac{1}{\gamma(1+\beta\cos\theta_1')}\frac{h}{dt_1} = \frac{1}{\gamma(1+\beta\cos\theta_1')}h\nu_1 = \frac{1}{\gamma(1+\beta\cos\theta_1')}\epsilon_1$$

$$\therefore\ \epsilon_1 = \gamma(1+\beta\cos\theta_1')\epsilon_1' \tag{14}$$

2-4.

K' 系は電子が静止している系なので (6) 式が成り立つはずである。

$$(6) \implies \epsilon_1' = \frac{\epsilon'}{1+\frac{\epsilon'}{m_ec^2}(1-\cos\Theta)} \underbrace{\simeq}_{\epsilon'\ll m_ec^2} \epsilon'\left\{1-\frac{\epsilon'}{m_ec^2}(1-\cos\Theta)\right\} \simeq \epsilon' \tag{15}$$

ただし、cos の中が違うことに注意しよう。本々(6) 式の $\cos\theta$ は散乱前後の光子の運動方向に平行な単位ベクトルの内積

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_1 = (1,0,0)\cdot(\cos\theta,\sin\theta,0) = \cos\theta$$

からきたものである ($theta$ を x 軸からの偏角としている)。よってこの $\cos\Theta$ による置き換えは $\mathbf{n}'$ と $\mathbf{n}_1'$ の内積からくる。実際に計算すると

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{n}' = (\cos\theta',\sin\theta'\cos\phi',\sin\theta'\sin\phi') \\ \mathbf{n}_1' = (\cos\theta_1',\sin\theta_1'\cos\phi_1',\sin\theta_1'\sin\phi_1') \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \mathbf{n}'\cdot\mathbf{n}_1' &= \cos\theta'\cos\theta_1' + \sin\theta'\cos\phi'\sin\theta_1'\cos\phi_1' + \sin\theta'\sin\phi'\sin\theta_1'\sin\phi_1' \\ &= \cos\theta'\cos\theta_1' + \sin\theta'\sin\theta_1'(\cos\phi'\cos\phi_1' + \sin\phi'\sin\phi_1') \\ &= \cos\theta'\cos\theta_1' + \sin\theta'\sin\theta_1'\cos(\phi'-\phi_1') = \cos\Theta \qquad (16) \end{aligned}$$

2-5.

$$(14) \implies \epsilon_1 = \gamma(1+\beta\cos\theta_1')\epsilon_1' \underbrace{\simeq}_{(15)} \gamma(1+\beta\cos\theta_1')\epsilon' \underbrace{=}_{(11)} \gamma^2(1+\beta\cos\theta_1')(1-\beta\cos\theta)\epsilon \tag{17}$$

$\theta=\pi,\ \theta_1'=0$ のとき

$$\epsilon_1 \simeq \gamma^2(1+\beta)(1+\beta)\epsilon = \gamma^2(1+\beta)^2\epsilon \tag{18}$$

となり、光子のエネルギー変化量 $\Delta\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon$ が最大となる。以下、この問題ではこの条件で衝突した場合を考えよう。

2-6.

電子の Lorentz factor が $\gamma \gg 1$ のとき、すなわち $\beta \sim 1$ のとき

$$(18) \implies \frac{\epsilon_1}{\epsilon} \simeq \gamma^2(1+1)^2 = 4\gamma^2 \tag{19}$$

2-7.

被相対論的な速度で運動する電子 $\beta \ll 1, \gamma \sim 1$ との散乱の場合はどうだろうか。

$$(18) \implies \epsilon_1 \simeq \gamma^2(1+2\beta+\beta^2)\epsilon \simeq \epsilon + 2\beta\epsilon$$

$$\therefore \Delta\epsilon \simeq 2\beta\epsilon \tag{20}$$

2-8.

ϵ, ϵ_1 がわかっていれば、電子の Lorentz factor を計算することができる。

$$(18) \implies \frac{\epsilon_1}{\epsilon} = \gamma^2(1+\beta)^2 = \frac{1+2\beta+\beta^2}{1-\beta^2} \iff \left(1+\frac{\epsilon_1}{\epsilon}\right)\beta^2 + 2\beta + \left(1-\frac{\epsilon_1}{\epsilon}\right) = 0$$

$$\implies \beta = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\left(1+\frac{\epsilon_1}{\epsilon}\right)\left(1-\frac{\epsilon_1}{\epsilon}\right)}}{2\left(1+\frac{\epsilon_1}{\epsilon}\right)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-\left\{1-\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon}\right)^2\right\}}}{\left(1+\frac{\epsilon_1}{\epsilon}\right)} = \left(-1 \pm \frac{\epsilon_1}{\epsilon}\right)\frac{\epsilon}{\epsilon+\epsilon_1}$$

$\beta > 0$ より

$$\beta = \left(-1+\frac{\epsilon_1}{\epsilon}\right)\frac{\epsilon}{\epsilon+\epsilon_1} = \frac{\epsilon_1-\epsilon}{\epsilon_1+\epsilon}$$

$$\therefore \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\epsilon_1-\epsilon}{\epsilon_1+\epsilon}\right)^2}} = \frac{\epsilon_1+\epsilon}{\sqrt{(\epsilon_1+\epsilon)^2-(\epsilon_1-\epsilon)^2}} = \frac{\epsilon_1+\epsilon}{\sqrt{4\epsilon_1\epsilon}} \tag{21}$$

これに $\epsilon = 3\times10^{-4}$ eV, $\epsilon_1 \sim 10$ keV を代入すると $\gamma \sim 2.887\times10^3$ となる。

2-9.

電子の熱運動エネルギーがわかっていれば、逆コンプトン散乱によって光子のエネルギーがどれくらい上昇するかが計算できる。

$$k_BT = \frac{1}{2}m_ev^2 = \frac{1}{2}m_ec^2\beta^2 \iff \beta = \sqrt{\frac{2k_BT}{m_ec^2}}$$

$k_B T = 5$ keV のとき $m_e c^2 \sim 511$ keV より $\beta \sim 0.1399$。$\epsilon = 3 \times 10^{-4}$ eV の場合、(18) 式より

$$\Delta\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon = \left\{\gamma^2(1+\beta)^2 - 1\right\}\epsilon = \left(\frac{(1+\beta)^2}{1-\beta^2} - 1\right)\epsilon = 2\frac{\beta+\beta^2}{1-\beta^2}\epsilon \sim 9.759 \times 10^{-5} \text{ (eV)}$$

[3] 逆コンプトン放射強度

3-1.

等方的な速度分布を持った gamma factor の電子による逆コンプトン散乱で増加した電磁波の放射強度の (入射電子や電磁波の進行方向についての) 平均値を逆コンプトン放射強度と定義し、これを求めてみよう。ただし電磁波は波動として扱う。またトムソン散乱のときと同様に系には特別な向きがないので結果は電磁波の偏光状態に依存しないはずである。よって入射電磁波は z 方向に進行する直線偏光電磁波とする。

放射強度は Lienard の式

$$P_e = \frac{2e^2}{3c^3}[\gamma^6(\dot{v}^2 - |\dot{\mathbf{v}} \times \boldsymbol{\beta}|^2)]$$

を計算すればよい。そのためにまず $\dot{\mathbf{v}}$ などを求めよう。相対論的な電子の運動方程式より

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_e c^2) = -e\mathbf{E}\cdot\mathbf{v} \implies \dot{\gamma} = -\frac{e}{m_e c^2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{v} \tag{22}$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_e \mathbf{v}) = -e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right) = -e(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}) \implies \dot{\gamma}\mathbf{v} + \gamma\dot{\mathbf{v}} = -\frac{e}{m_e}(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}) \tag{23}$$

$$(22),(23) \implies \gamma\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m_e c^2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v} - \frac{e}{m_e}(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}) = \frac{e}{m_e}(\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \frac{e}{m_e}(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B})$$

$$\therefore \dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m_e\gamma}\left\{(\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \mathbf{E} - \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}\right\} \tag{24}$$

ベクトル

$$\boldsymbol{\beta} = \beta\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\end{pmatrix}, \mathbf{E} = E(t)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{B} = B(t)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad (E(t) = B(t))$$

を (24) 式に代入し、計算する。

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}} &= \frac{e}{m_e\gamma}\left\{E(t)\beta^2\sin\theta\cos\phi\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}E(t)\\0\\0\end{pmatrix} - \beta E(t)\begin{pmatrix}-\cos\theta\\0\\ \sin\theta\cos\phi\end{pmatrix}\right\} \\
&= \frac{eE(t)}{m_e\gamma}\begin{pmatrix}\beta^2\sin^2\theta\cos^2\phi - 1 + \beta\cos\theta \\ \beta^2\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi \\ \beta^2\sin\theta\cos\theta\cos\phi - \beta\sin\theta\cos\phi\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\therefore \dot{v}^2 = \frac{e^2E^2}{m_e^2\gamma^2}(\beta^4\sin^2\theta\cos^2\phi^2 + 1 + \beta^2\cos^2\theta - \beta^2\sin^2\theta\cos^2\phi - 2\beta\cos\theta) \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
(24) \implies \dot{\mathbf{v}} \times \boldsymbol{\beta} &= \frac{e}{m_e\gamma}\{(\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\beta})\underbrace{\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta}}_{=\mathbf{0}} - \mathbf{E}\times\boldsymbol{\beta} - (\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B})\times\boldsymbol{\beta}\} = -\frac{e}{m_e\gamma}\{\mathbf{E}\times\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B})\times\boldsymbol{\beta}\} \\
&= -\frac{e}{m_e\gamma}\{\mathbf{E}\times\boldsymbol{\beta} + \beta^2\mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}\} \\
&= -\frac{e}{m_e\gamma}\left\{E\beta\begin{pmatrix} 0 \\ -\cos\theta \\ \sin\theta\sin\phi \end{pmatrix} + \beta^2E\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \beta^2E\sin\theta\sin\phi\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}\right\} \\
&= \frac{e\beta E}{m_e\gamma}\begin{pmatrix} \beta\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi \\ \beta\sin^2\theta\sin^2\phi + \cos\theta - \beta \\ \beta\sin\theta\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\sin\phi \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\therefore |\dot{\mathbf{v}}\times\boldsymbol{\beta}|^2 = \frac{e^2E^2}{m_e^2\gamma^2}(\beta^4\sin^4\theta\sin^2\phi + \beta^2\cos^2\theta + \beta^4 - 2\beta^3\cos\theta - 2\beta^4\sin^2\theta\sin^2\phi + \beta^4\sin^2\theta\cos^2\theta\sin^2\phi + \beta^2\sin^2\theta\sin^2\phi) \tag{26}$$

$$(25),(26) \implies P_e(\theta,\phi) = \frac{2e^2}{3c^3}[\gamma^6(\dot{v}^2 - |\dot{\mathbf{v}}\times\boldsymbol{\beta}|^2)] = \frac{2e^4}{3m_e^2c^3}[E^2\gamma^4(\beta^4\sin^2\theta + 1 - \beta^2\sin^2\theta - 2\beta\cos\theta - \beta^4 + 2\beta^3\cos\theta)] \tag{27}$$

この式を全立体角で積分し、平均すればよい。

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\ \sin^2\theta\sin\theta &= 2\pi\int_0^\pi \sin^3\theta\ d\theta = 2\pi\int_0^\pi\left(\frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta\right)d\theta = 2\pi\left[-\frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{12}\cos 3\theta\right]_0^\pi \\
&= 4\pi\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{12}\right) = \frac{8}{3}\pi
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\ \sin\theta = 4\pi \tag{29}$$

$$\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\ \cos\theta\sin\theta = 2\pi\int_0^\pi d\theta\ \frac{1}{2}\sin 2\theta = 0 \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
\therefore (27)\sim(30) \implies P_e &= \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} P_e(\theta,\phi)\ d\Omega = \frac{1}{4\pi}\frac{2e^4}{3m_e^2c^3}\left[E^2\gamma^4\left(\beta^4\frac{8}{3}\pi + 4\pi - \beta^2\frac{8}{3}\pi - \beta^4 4\pi\right)\right] \\
&= \frac{2e^4}{3m_e^2c^3}\left[E^2\gamma^4\left(\frac{2}{3}\beta^4 + 1 - \frac{2}{3}\beta^2 - \beta^4\right)\right] = \frac{2e^4}{3m_e^2c^3}\left[E^2\gamma^4(1-\beta^2)\left\{-\frac{2}{3}\beta^2 + (1+\beta^2)\right\}\right] \\
&= \frac{2e^4}{3m_e^2c^3}\left[E^2\gamma^2\left(1 + \frac{1}{3}\beta^2\right)\right]
\end{aligned}$$

入射電磁波 (光子) のエネルギー密度 $U_{\rm ph} = \frac{1}{8\pi}(E^2+B^2) = \frac{1}{4\pi}E^2$ とトムソン散乱断面積 $\sigma_{\rm T} = \frac{8\pi}{3}\frac{e^4}{m_e^2c^4}$ を用いて

$$P_e = c\sigma_{\rm T}\left[U_{\rm ph}\gamma^2\left(1 + \frac{1}{3}\beta^2\right)\right]$$

この中には入射電磁波が電子により散乱される前のエネルギーが含まれていので、それを引かなければ逆コンプトン散乱に

よる放射のエネルギーとは呼べない。電子のトムソン散乱断面積が $\sigma_{\rm T}$ で与えられているので単位時間当たりに散乱される光子数 (電磁波) は $c\sigma_{\rm T}$。よって単位時間当たりに散乱される電磁波のエネルギーは

$$P_{\rm ini} = c\sigma_{\rm T}[U_{\rm ph}]$$

$$P_{\rm Comp} = P_e - P_{\rm ini} = c\sigma_{\rm T}\left[U_{\rm ph}\left\{\gamma^2\left(1+\frac{1}{3}\beta^2\right)-1\right\}\right] = c\sigma_{\rm T}\left[U_{\rm ph}\frac{1+\frac{1}{3}\beta^2-1+\beta^2}{1-\beta^2}\right] = \frac{4}{3}c\sigma_{\rm T}[U_{\rm ph}\gamma^2\beta^2] \tag{31}$$

3-2, 3.

以前求めた $P_{\rm sync} = \dfrac{4}{3}c\sigma_{\rm T}[U_{\rm ph}\gamma^2\beta^2]$ より

$$\frac{P_{\rm sync}}{P_{\rm Comp}} = \left[\frac{U_B}{U_{\rm ph}}\right] \tag{32}$$

同じ Lorentz factor を持つ電子が起源の逆コンプトン放射強度としんとクロトン放射強度の間にはこの式が常に成り立つ。

3-4.

温度 T で熱運動している電子による逆コンプトン放射強度が $k_BT \ll m_ec^2$ の非相対論的極限ではどうなるだろうか。非相対論的な熱運動する自由粒子系では速度分布が Maxwell-Boltzman 分布で与えられる、すなわち $\mathbf{v} \sim \mathbf{v}+d\mathbf{v}$ に粒子を見いだす確率は

$$P(v)dv_xdv_ydv_z = \left(\frac{m_e}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m_ev^2}{2k_BT}\right)dv_xdv_ydv_z = \left(\frac{m_e}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m_ev^2}{2k_BT}\right)v^2\sin\theta\ dvd\theta d\phi$$

$$\therefore\ < v^2 > = \int_0^\infty dv\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}d\phi\exp\left(-\frac{m_ev^2}{2k_BT}\right)v^4\sin\theta = 4\pi\left(\frac{m_e}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^4\exp\left(-\frac{m_ev^2}{2k_BT}\right)dv$$

ガウス積分公式

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \implies \int_0^\infty x^4e^{-\alpha x^2}dx = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$$

を用いて

$$\begin{aligned} < \beta^2 > &= \frac{4\pi}{c^2}\left(\frac{m_e}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^4\exp\left(-\frac{m_ev^2}{2k_BT}\right)dv = \frac{4\pi}{c^2}\left(\frac{m_e}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{m_e}{2k_BT}\right)^5}} \\ &= \frac{3}{2c^2}\left(\frac{m_e}{2k_BT}\right)^{3/2}\left(\frac{2k_BT}{m_e}\right)^{5/2} = \frac{3k_BT}{m_ec^2} \end{aligned}$$

非相対論的より $\gamma \sim 1$ と上式を (31) 式にを代入。

$$P_{\rm Comp,nonrel} = c\sigma_{\rm T}\left[U_{\rm ph}\frac{4k_BT}{m_ec^2}\right] \tag{33}$$

逆コンプトン散乱で増加した放射強度を $P_{\rm Comp}$ としているので、光子 1 つのエネルギーの増加率の平均値は

$$\left\langle \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \right\rangle = \frac{P_{\mathrm{Comp,nonrel}}}{P_{\mathrm{ini}}} = \left[\frac{4k_B T}{m_e c^2}\right] \simeq \left[\frac{4k_B T}{511\mathrm{keV}}\right] \simeq 0.04 \left[\frac{k_B T}{5\mathrm{keV}}\right] \tag{34}$$

3-5.

ここまでの扱いでは暗黙の仮定が含まれている。それは入射電磁波を波として扱っている事から、電磁波の波長が電子の大きさよりも十分大きくなければならない。光子と電子の相互作用を厳密に解きたければ、量子力学を持ち出さなければならないだろう。さらに、この問題では電子との衝突によってエネルギーが増えることを前提としている。